

LE
CALCUL PAR LE TRAIT,
SES ÉLÉMENTS
ET SES APPLICATIONS.



EN VENTE A LA MÊME LIBRAIRIE.

GÉOMÉTRIE PERSPECTIVE, ou Principes de projection polaire appliqués à la description des corps, contenant : 1° l'exposé du système de projection ; 2° ses épreuves élémentaires ; 3° celles qui concernent les surfaces du second degré, leurs plans tangents et leurs intersections, soit entre elles, soit par des plans donnés ; 4° enfin, des exemples variés de l'emploi des nouvelles épreuves élémentaires pour mettre immédiatement en perspective un corps quelconque connu de forme et de position, et pour déterminer les ombres produites sur ce corps par des rayons lumineux de direction donnée ; par *B.-E. Cousinery*, ingénieur en chef des ponts et chaussées, 1 vol. in-4, orné de planches, 1828. 7 fr.

NOTE sur un nouvel état de mathématiques, br. in-8. 1835. 1 fr.
Par le même auteur.



IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, n° 4, près de l'Odéon.

609310

1)

LE

CALCUL PAR LE TRAIT,

SES ÉLÉMENTS

ET SES APPLICATIONS

A LA MESURE DES LIGNES, DES SURFACES ET DES CUBES,
A L'INTERPOLATION GRAPHIQUE ET A LA DÉTERMINATION, SUR L'ÉPURE,
DE L'ÉPAISSEUR DES MURS DE SOUTÈNEMENT
ET DES MURS DE CULÉES DES VOUTES;

PAR B.-E. COUSINERY,
INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSEES.



A PARIS,

CHEZ CARILIAN-GOEURY ET V^e DALMONT,

TIRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSEES ET DES MINES,
QUAI DES AUGUSTINS, N^{os} 39 ET 41.

—
1839.

0.8.00



AVERTISSEMENT.

La géométrie comporte des figures de deux espèces : les unes, purement théoriques, n'exigent presque aucun soin de tracé ; elles se composent, le plus souvent, de lignes grossièrement exécutées à la craie sur une planche noire, et suffisent, telles quelles, pour porter dans l'esprit la plus entière conviction. Il existe même une foule de propriétés que l'on parvient à démontrer indépendamment de toute représentation matérielle. La pensée, dans les deux cas, supplée, presque sans effort, à l'absence comme à l'imperfection de la figure

Mais, aussitôt qu'un dessin géométrique a un but d'utilité, dès qu'il est susceptible de recevoir une destination spéciale et pratique, cette imperfection ne peut plus être tolérée ; il est indispensable que les lignes y soient bien droites et bien déliées, les cercles parfaitement ronds, les courbes fidèlement reproduites et purement tracées, les intersections distinctes et rigoureusement obtenues, les mesures exactement relevées et convenablement appliquées ; enfin, tout doit approcher, autant

que possible, de cette perfection absolue qui fait l'essence des conceptions géométriques, et sur laquelle repose toute la rigueur des démonstrations.

Ces dernières remarques se rattachent plus particulièrement à la science des projections en général; on parvient à les mettre en pratique par le moyen de l'art du trait.

Cet art est celui qu'exercent, dans le cabinet, les architectes et les ingénieurs; et, dans les grands chantiers, les appareilleurs, les charpentiers, les constructeurs de navire, en un mot, toutes les professions savantes qui ont pour but principal de donner des formes rigoureuses à la matière brute.

Quand un dessin ressort de l'art du trait, on sait qu'il prend le nom d'épure.

Les figures de cet ouvrage devaient nécessairement se trouver comprises dans cette catégorie. Quelle espèce d'utilité pourrait-on retirer, en effet, d'un procédé matériel de calcul qui ne serait pas irréprochable sous le double rapport de forme et de conception?

Nous eussions dû l'intituler, pour être conséquent avec ces principes : *le calcul par la science et par l'art du trait*; en adoptant une dénomination plus concise, nous nous étions réservé de l'expliquer au besoin, sans nous dissimuler, pour cela, les désavantages d'un titre qui exigeait lui-même une explication.

Dans l'état actuel de la science, on sent que l'ouvrage

que nous avions entrepris pouvait bien difficilement provenir en entier de notre propre fond : une fois l'idée conçue, il ne s'agissait, en quelque sorte, que d'en rassembler les matériaux épars, de les coordonner logiquement entre eux, et de remplir les diverses lacunes qui pouvaient s'y présenter, de manière à parvenir au développement complet de la nouvelle théorie. Ce serait donc méconnaître les obligations les plus essentielles que de ne pas indiquer ici l'origine des principaux emprunts auxquels nous avons dû avoir recours.

Peut-être même nos efforts eussent-ils été complètement infructueux, sans les ressources que nous ont procurées et les Annales de M. Gergonne, et les travaux de M. Brianchon, et ceux plus récents de M. Poncelet. Nous avons, envers M. Chasle, une obligation encore plus étroite; car outre les précieux documents que renferme son *Histoire des méthodes en géométrie*, nous avons à lui faire agréer un témoignage particulier de reconnaissance pour la manière dont il a bien voulu y mentionner nos premiers essais sur le système de projection polaire.

Enfin, en dehors des facilités que nous venons de signaler, il fallait encore un certain loisir pour se livrer à la publication d'un ouvrage de cette nature : ce loisir, nous le devons à l'homme d'état qui se trouve chargé depuis 1832 de la direction du corps des ponts et chaussées; sa bienveillance nous ayant conservé une position

qui se trouve plus en rapport avec le genre de nos études et avec l'affaiblissement de notre santé, que la plupart de celles qui pouvaient nous être assignées, dans les rangs du service actif.

A défaut de toutes ces circonstances réunies, ce nouvel ouvrage n'eût probablement jamais paru. Il contiendra d'ailleurs assez de travaux qui nous sont personnels, pour qu'on ne puisse le regarder comme une simple compilation. Et, sans prétendre établir la moindre comparaison entre ce que nous offrons et ce que nous avons emprunté, tout ce que nous pouvons désirer de plus favorable pour le livre que cet ensemble de travaux a produit, c'est qu'on use quelque jour à son égard de la même liberté que nous nous sommes permise en le composant.

INTRODUCTION.



L'idée abstraite ou collective qui se rattache aux diverses significations du mot *grandeur*, devrait comprendre, sans exception, tout ce qui est susceptible d'être modifié en plus et en moins; mais on se contente quelquefois d'appliquer ce terme générique à une seule espèce de grandeurs, dont les changements comportent une appréciation rigoureuse, et qui font l'objet principal des mathématiques. Nous allons exclusivement nous occuper, dans ce chapitre, de celles qui rentrent dans cette catégorie.

Les modifications que les grandeurs sont susceptibles de subir, se trouvent renfermées entre deux limites: l'annulation totale et l'infini. Elles tendent vers la première par la diminution, et vers la seconde par l'augmentation.

On apprécie le changement qu'une modification quelconque a fait subir à une grandeur donnée, en comparant celle-ci, prise dans ses deux états de transformation successive, à un troisième état de grandeur qu'on suppose, chez elle, primitif et invariable; et qu'on distingue sous le nom d'*unité de mesure*.

Mesurer est l'opération par laquelle on parvient à cette comparaison : elle consiste à déterminer combien de fois l'unité se trouve comprise dans la grandeur qu'on évalue; ou, en d'autres termes, à chercher combien de fois il faudrait faire subir à cette grandeur une diminution équivalente à l'unité, pour l'amener à sa limite d'annulation.

Toutes les grandeurs, une fois mesurées, deviennent des groupes plus ou moins considérables d'unités : et, sous cette nouvelle forme, qui répond à l'idée de quantité, le plus ou le moins d'unités que contient chaque groupe, fait connaître les relations d'égalité ou de différence que présentent entre eux les divers groupes à comparer.

Ce procédé cesse d'être applicable quand les deux grandeurs que l'on veut mesurer ne peuvent être considérées comme provenant par modification d'une unité de même espèce. Il n'y a pas de comparaison directe à établir entre des grandeurs qui sont de nature différente.

Pour mettre la mesure des grandeurs à la portée de toutes les intelligences, on a classé méthodiquement, en série, les différents groupes d'unités à partir de leur limite d'annulation. La nomenclature qui correspond à cette classification, est soumise à des lois si simples, qu'elle se grave promptement dans la mémoire, et que chacun peut, par l'enchaînement méthodique de ses dénominations, se faire une idée précise,

soit de la place qu'un groupe occupe dans la série, soit de la quantité comparative d'unités qu'il contient.

Ce système de classement a reçu le nom de *numération*. Chacune des dénominations spéciales qui en est résultée a été appelée *nombre*; de là, le nom de *série naturelle des nombres* que la série elle-même a reçu. La loi qui préside à sa formation est, en effet, celle qui se présentait le plus naturellement à l'esprit : chaque groupe, mis en place, doit contenir une unité de plus que celui qui le précède dans la série. La loi qui régit sa nomenclature offre, de son côté, une périodicité de dénominations et de désinences qui se reproduit à chaque dizaine d'unités successives : c'est pour cela que ce système de numération a été appelé *décimal*.

Une notation graphique également simple et reposant sur la même périodicité décimale, a été adoptée pour conserver et reproduire, au besoin, les divers nombres correspondants à des grandeurs déjà mesurées, et dont il importe par conséquent de conserver le souvenir. Les éléments de cette notation graphique sont connus sous le nom de *chiffres*. L'écriture qui résulte de leur combinaison est tellement parfaite, qu'elle se traduit immédiatement en nombres, dans toutes les langues où la numération décimale est adoptée, et qu'elle indique nettement à l'esprit la position que le nombre qu'elle représente occupe dans la série infinie qui procède, comme on sait, par *un, deux, trois*, etc.

Au moyen des relations que nous venons de rappeler, un assemblage de chiffres et le nombre qui leur correspondent ont forcément, par eux-mêmes, et abstraction faite de toute considération d'unité, une signification qui leur est propre, et une valeur de position relative; puisqu'ils indiquent une place déterminée dans une série qu'on peut, à volonté, considérer tout entière abstractivement. Ce n'est plus alors qu'une classification mnémonique; et, sous cette nouvelle acception, elle peut s'appliquer à une infinité d'objets tout à fait étrangers l'un à l'autre, et que l'on envisagerait exclusivement par rapport à l'ordre dans lequel ils se présentent entre eux. Ces objets sont dits alors *numérotés*; les dénominations des nombres prennent ordinairement dans cette circonstance la forme adjectivique *premier, second, troisième*, etc., et la série, sous cette forme, peut admettre un terme *dernier*.

Dans toutes les occasions où l'on ne spécifie pas d'unités, les nombres sont dits *abstraits*; et *concrets* dans les cas contraires.

Le moyen le plus simple pour reconnaître mécaniquement le nombre qui correspond à un groupe quelconque d'unités, est de réciter la série naturelle des nombres terme par terme, au fur et à mesure qu'on détache du groupe, une par une, les unités qui le composent. Le nombre de la série auquel on arrive au moment où la grandeur se trouve annulée, est celui qui appartient au groupe qu'on vient de détruire; on

arrive nécessairement à un résultat identique , en reformant le même groupe par additions successives , à partir de la première unité. Cette opération, dans quelque sens qu'on l'exécute, s'appelle *compter*. Les deux manières de compter se servent de vérification mutuelle.

Mais on sent que dans le plus grand nombre des cas, il est absolument impossible d'évaluer une grandeur donnée en la comptant. Les opérations mentales et matérielles auxquelles on est alors obligé d'avoir recours, ont reçu le nom de calcul. C'est par le calcul pris dans son acception la plus générale que les mathématiques nous font arriver à la détermination des grandeurs.

Comme les modifications opérées sur les nombres exprimés en chiffres, correspondent toujours à une modification équivalente des grandeurs représentées par eux, c'est sur les nombres considérés abstractivement et exprimés en chiffres, que s'exécutent le plus ordinairement les opérations de calcul qui font connaître *a priori* ce que deviennent les grandeurs qu'ils représentent, quand on se propose de les modifier en plus ou en moins d'une manière quelconque. Les opérations d'ensemble et de détail qui conduisent à ce résultat, s'appellent alors calcul arithmétique, et la science qui les concerne porte elle-même ce nom. Ces calculs peuvent, en se conformant à de certaines règles connues, s'exécuter mentalement sur les nom-

bres, comme s'exécuter, en quelque sorte, mécaniquement sur leur représentation en chiffres.

L'arithmétique n'étant, elle-même, qu'une branche particulière de la science des grandeurs, ne fournit pas, à beaucoup près, tous les procédés qui sont nécessaires pour parvenir à les évaluer. Au lieu de figurer la série naturelle des divers groupes d'unités par des assemblages de chiffres, qui sont des signes purement conventionnels, et qui ne représentent rien par eux-mêmes, on peut également la représenter, dans certaines circonstances, par la série naturelle des unités linéaires; puisqu'en ajoutant successivement et bout à bout l'unité linéaire à elle-même, on arrive à former des groupes de même rang, dans chacune des séries naturelles, susceptibles, par conséquent, d'être, au besoin, désignés par les mêmes nombres, et figurés par les mêmes chiffres. On y trouve cet avantage que, dans une infinité de cas, les grandeurs linéaires sont immédiatement comparables entre elles, sans avoir besoin d'être rapportées à une même unité.

Les calculs qui correspondent à cette espèce de grandeur dépendent de la géométrie, et s'exécutent matériellement par le tracé, l'œil peut toujours en suivre les opérations comme en apprécier très-approximativement la justesse.

Dans ce nouveau système de calcul, la série linéaire qui correspond, terme à terme, à celle des nombres naturels, prend le nom d'*échelle*.

Vu la parfaite symétrie qui existe dans toutes ses parties, on peut, sans inconvénient, réduire une échelle à ne contenir qu'un petit nombre de groupes d'unités. Elle porte ordinairement avec elle, et indique par une notation chiffrée, son rapport, terme à terme, avec la série des nombres naturels. C'est au moyen de cette correspondance que l'on parvient immédiatement à exprimer en nombre une grandeur linéaire quelconque; et, réciproquement, que l'on peut traduire en ligne une grandeur quelconque déjà mesurée et exprimée en nombre. Cette dernière substitution une fois opérée, on conçoit comment les diverses opérations de calcul qui avaient lieu arithmétiquement sur les nombres représentés en chiffres, peuvent s'exécuter, à leur tour, graphiquement sur ces mêmes nombres représentés par des grandeurs linéaires du même ordre, en se conformant aux lois géométriques qui régissent les modifications de ces dernières. Telle est l'idée fondamentale qui a donné naissance à cet ouvrage.

Nous allons voir², en suivant ses développements, que toutes les opérations de calcul arithmétique ont leurs équivalentes dans le système de calcul graphique. Lors donc qu'il s'agira de combiner des nombres entre eux, ou de grouper des unités suivant certaines lois, nous allons établir, que l'on pourra également y parvenir, soit par la science du calcul des chiffres ou l'arithmétique proprement dite, soit au moyen du calcul par le trait dont la géométrie fait connaître les règles.

Ces deux procédés pouvant se servir de vérifications mutuelles, ayant, d'ailleurs, chacun des avantages qui leur sont propres, nous avons lieu d'espérer que l'exposé des règles du calcul par l'art du trait auquel nous allons nous livrer dans cette nouvelle publication, ne sera pas un travail entièrement dépourvu d'intérêt et d'utilité, et c'est ce que nous confirmerons au besoin par les applications dont nous avons à les faire suivre.

LE
CALCUL PAR LE TRAIT,
SES ÉLÉMENTS
ET SES APPLICATIONS.

PREMIÈRE PARTIE.

DE LA GRANDEUR LINÉAIRE.

La ligne droite, considérée comme provenant de la rencontre de deux solutions planes opérées dans l'espace, est d'une étendue nécessairement infinie; mais elle n'est infinie que dans les deux directions qu'un mobile peut prendre en la parcourant. Si, dans cette étendue sans limites, on veut considérer particulièrement une partie quelconque, pour distinguer celle-ci du tout infini auquel elle appartient, il faudra nécessairement la limiter; et, comme le tout s'étend indéfiniment dans deux directions opposées, il faudra assigner deux limites à la portion que l'on veut particulièrement considérer. La limite de la ligne se nomme point. C'est le lieu où elle est rencontrée par une autre ligne; c'est l'endroit où s'opérerait une solution partielle, si, en considérant la surface sur laquelle on exécute le tracé, il s'opérait dans celle-ci une rupture linéaire; le point est donc, à proprement parler, le lieu de deux solutions linéaires, comme la ligne est elle-

même le lieu de deux solutions planes ; nous n'avons par conséquent en notre pouvoir aucun moyen de les représenter avec exactitude. Le dessinateur y supplée autant que l'imperfection de ses instruments le lui permet , en traçant , pour figurer la ligne , un ruban aussi délié qu'il le peut , et en marquant sur ce ruban les lieux de solution avec une pointe acérée telle que l'extrémité d'une aiguille ou celle d'un compas bien effilé , soit un cercle d'une assez petite étendue pour que le lieu de son centre puisse se confondre , en quelque sorte , avec la surface circulaire elle-même.

Une portion de ligne , limitée dans ses deux sens , devient une grandeur déterminée : constante , quand ses limites restent fixes , susceptible d'augmentation et de diminution , quand ses limites s'écartent ou se rapprochent. L'écartement des deux limites peut s'étendre jusqu'à l'infini , et leur rapprochement arriver au contact , c'est-à-dire , à l'annulation de la partie interceptée ; et , comme les diverses parties d'une même droite sont exactement superposables , et par conséquent identiques entre elles , dans tout ce qui ne concerne pas leur dimension en longueur , on voit que les modifications en plus et en moins que ces parties sont dans le cas de subir , peuvent être considérées comme les états divers de transition d'une même espèce de grandeur , que l'on désigne sous le nom générique de grandeur linéaire , et que l'on peut facilement évaluer dans ses transformations diverses ; en la rapportant à une même unité de mesure.

La comparaison de deux grandeurs linéaires s'exécute ordinairement par superposition ; les deux grandeurs sont égales quand on peut , en les superposant , faire coïncider leurs quatre limites. Si cette coïncidence ne peut avoir lieu , celle dont les limites ont besoin de se rapprocher pour arriver à superposition exacte , est la plus grande ; il faut qu'elle diminue pour parvenir à l'état d'égalité.

On voit ici que la considération d'unités est inutile tant qu'on peut se borner à la comparaison précédente.

Puisque les grandeurs linéaires dépendent exclusivement de la position de leurs limites, il s'ensuit que les points qui déterminent la direction d'une ligne déterminent également la grandeur linéaire qui est comprise entre eux sur cette droite; c'est pour cela que l'ouverture qui existe entre les deux pointes d'un compas est si souvent employée pour représenter ces mêmes grandeurs, et pour les reporter, les reproduire et les comparer dans les diverses modifications qu'elles ont à subir; aussi c'est le plus souvent par l'intermédiaire de cet instrument que s'exécute la comparaison des grandeurs linéaires, quand elle a lieu par superposition. La superposition serait encore possible, si l'une des lignes se trouvait tracée sur un corps transparent.

On peut également, par juxta-position, arriver au même résultat comparatif; il faut alors que l'une des lignes à comparer soit ou placée, ou rapportée sur l'arête saillante d'un corps régulier, comme le tranchant d'un double décimètre ou l'arête de la languette d'une règle à calculer.

C'est sous cette dernière forme, susceptible d'une grande précision, depuis qu'on fait usage des nonius, que s'exécute la mesure des grandeurs linéaires sur la plupart des instruments de géodésie et d'astronomie; soit qu'il s'agisse d'y évaluer des portions de lignes droites, soit qu'on ait à y mesurer des portions de lignes circulaires.

Cette parité des moyens de mensuration appliqués à la droite et à l'arc de cercle, est la conséquence d'une propriété que la ligne circulaire partage avec la droite: celle de pouvoir glisser, relief dans incrustation, sans que la juxta-position mathématique cesse d'exister entre ses parties; il en résulte que l'arc de cercle peut être considéré, à son tour, comme une espèce de grandeur linéaire distincte, et qu'on peut également opérer sur elle, en em-

ployant des moyens de mensuration analogues à ceux dont on se sert pour la ligne droite. Cette grandeur qui est finie sert, dans l'art du trait, à mesurer les modifications d'une autre espèce de grandeur qui est infinie; nous voulons parler de l'espace superficiel compris entre deux lignes qui font un angle. Tous les changements qu'un pareil espace peut recevoir, par addition ou par soustraction, étant identiquement reproduits par l'arc de cercle compris entre les côtés et décrit du sommet comme centre; c'est toujours sur ce dernier que s'exécutent les calculs graphiques qui se rapportent aux variations angulaires correspondantes.

Il existe une troisième ligne qui procède de la droite et du cercle, et qui jouit également de la faculté de juxtaposition constante pendant que son incrustation glisse sur son relief; cette ligne est l'hélice; elle est donc, comme les deux autres, essentiellement propre à devenir, soit un instrument de mesure, soit un moyen de calcul, et l'on conçoit qu'elle se prêterait sans peine aux mêmes procédés de mensuration.

RÈGLES ÉLÉMENTAIRES DU CALCUL GRAPHIQUE.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

Fig. 1. L'addition et la soustraction linéaire ou graphique sont deux opérations tellement simples, qu'il nous suffirait presque de les mentionner ici pour mémoire: additionner deux grandeurs linéaires a et b , c'est les mettre bout à bout sur une ligne indéfinie cd ; le total est la grandeur qui se trouve comprise entre les deux limites qui ne s'aboutent pas. La règle est la même quel que soit le nombre de termes à additionner entre eux.

Fig. 2. Pour soustraire une grandeur linéaire b d'une autre a , il suffit de les $\left\{ \begin{array}{l} \text{superposer} \\ \text{juxta-poser} \end{array} \right\}$, de manière à ce

qu'une de leurs limites coïncide : la portion de a qui ne se trouve pas $\left\{ \begin{array}{l} \text{recouverte} \\ \text{doublée} \end{array} \right\}$ est égale au reste de la soustraction. On fait coïncider une des limites pour que le reste se présente en un seul bloc. Ce reste est encore, dans cette circonstance, la grandeur comprise entre les limites qui ne coïncident pas. Quand la superposition ne peut pas s'exécuter directement, elle peut toujours s'effectuer au moyen d'une ligne fictive équivalente, qu'on détermine par l'écartement des pointes d'un compas, et qui, dès qu'on s'est assuré de son identité avec la grandeur du terme à ajouter ou à soustraire, peut être transportée et reproduite partout où il était nécessaire de présenter la grandeur primitive qu'elle remplace.

MULTIPLICATION.

La multiplication graphique affecte deux formes différentes : la plus simple est celle que l'on obtient par l'addition répétée de l'un des facteurs ; elle s'exécute, en reportant la même ouverture de compas bout à bout un certain nombre de fois déterminé par l'autre facteur qui doit alors être évalué en nombre ; nous disons évalué en nombre, parce que la répétition d'une même opération est une quantité abstraite.

Cette multiplication n'est, comme on vient de le voir, qu'une addition multiple ; elle se compose de deux termes et d'une condition : le premier terme est la grandeur qu'il s'agit d'ajouter plusieurs fois à elle-même, grandeur qui pourrait être d'une nature quelconque ; la condition exprime le *nombre de fois* que cette grandeur doit se trouver répétée ; le second terme ou produit exprime le résultat de l'opération. Or, tandis que ce dernier est forcément une grandeur de même nature que celle qui a servi à le former, la condition est, au contraire, un nombre abstrait qui ne saurait s'appliquer à aucune unité

particulière, et qui correspond par conséquent à une unité nécessairement abstraite.

Quand, donc, nous aurons à ajouter une ligne plusieurs fois à elle-même, c'est-à-dire, à la doubler, tripler, quadrupler, etc., on reconnaîtra facilement dans l'opération ainsi formulée, le genre de multiplication que nous venons d'analyser; les facteurs 2, 3, 4, qui représenteraient ici la condition, sont des nombres nécessairement abstraits; et le produit est encore une ligne, puisqu'il se compose de plusieurs portions de lignes placées bout à bout sur une même direction.

Mais, dans les opérations qui dérivent du calcul graphique, la multiplication ne se présente pas toujours sous cette forme que nous pourrions nommer arithmétique. On y est souvent conduit à opérer la multiplication d'une ligne *par une ligne*; et, cependant, nous venons de voir que la condition qui constitue l'indice multiplicateur, doit toujours se trouver exprimée par un nombre *abstrait*. Il semble d'abord qu'on lèvera toute difficulté, en donnant une signification abstraite à la ligne que l'on prend pour multiplicateur: on y parvient, comme on sait, au moyen d'une échelle quelconque à laquelle on la compare, pour obtenir le nombre correspondant de la série naturelle qui doit être prise abstractivement à sa place, et l'on rétablit ainsi le véritable indice multiplicateur.

Mais une difficulté nouvelle résulte de ce mode d'opération: le produit de deux lignes, obtenu par ce procédé, n'est plus une quantité constante; il varie nécessairement avec l'unité de l'échelle adoptée, il peut même affecter tous les degrés de grandeur, depuis l'infiniment petit jusqu'à l'infiniment grand. La multiplication de deux lignes, ainsi comprise, donnerait donc, en apparence, un produit tout à fait indéterminé.

Ces difficultés disparaissent, si l'on envisage constam-

ment la multiplication de deux lignes, comme l'expression de la surface rectangulaire que détermineraient ces deux grandeurs placées de manière à constituer un angle droit, et si l'on regarde en outre l'unité de mesure employée à opérer leur multiplication, comme le côté du carré qui doit, à son tour, servir de mesure superficielle à ce rectangle. Ces relations une fois admises, le produit linéaire de la multiplication d'une ligne par une ligne n'est plus une ligne, c'est une surface rectangulaire, ayant pour base l'unité de mesure adoptée, et pour hauteur une ligne qui, comme nous venons de le remarquer, varie en raison inverse de cette unité; et qui varie par cela même que leur produit superficiel doit toujours être une quantité constante, et qu'il doit se trouver équivalent, dans tous les cas, au rectangle primitif déterminé par les deux facteurs linéaires, dont on avait à opérer la multiplication.

Pour avoir la signification réelle du produit de deux lignes, abstraction faite de toute unité finie, il suffit de supposer que le multiplicande représente dans sa longueur un élément différentiel de surface. Cet élément, d'après les lois de la multiplication, devra être ajouté à lui-même, par juxta-position, autant de fois que sa base différentielle peut être contenue dans le multiplicateur; construction qui produira nécessairement une surface rectangulaire dont les deux facteurs formeront les côtés. Ici, les deux termes sont, comme on voit, de même nature.

D'après ces considérations, il semble naturel de donner de préférence le nom de multiplication superficielle à toutes celles dont les deux facteurs seront des lignes, afin de ne pas s'exposer aux erreurs qui pourraient résulter de l'oubli de la vraie signification des résultats purement linéaires que l'on obtient par le procédé graphique qui concerne spécialement ce genre de multiplication, et que nous allons indiquer ci-après.

Les mêmes remarques s'appliquent nécessairement soit

au produit de la multiplication de trois lignes, soit à celui d'une surface et d'une ligne; ces deux opérations constituent une multiplication cubique; et la ligne que l'on obtient en effectuant ces produits par le tracé, est la hauteur d'un second cube qui est équivalent à celui que déterminent les facteurs primitifs, et qui a pour base l'unité superficielle, soit un carré, dont le côté égale l'unité de mesure au moyen de laquelle on aura opéré graphiquement cette double multiplication.

Fig. 3. Lemme premier. Soient deux lignes *conjuguées of, og* situées d'une manière quelconque sur un plan, et partant d'un même point *o* que nous nommerons *origine*; si ces deux lignes sont coupées par un système d'ordonnées parallèles, dirigées d'une manière quelconque ces ordonnées *di, eh, fg* intercepteront entre elles, sur les deux conjuguées, des grandeurs linéaires qui pourront être considérées comme des projections réciproques. Dès lors, selon que l'on considérera plus particulièrement une des conjuguées comme étant le lieu des projections de l'autre, le rapport constant qui existe entre chaque partie projetée et sa projection s'obtiendra d'abord en ligne en projetant à son tour l'unité de mesure entre les deux conjuguées, et il suffira d'évaluer à l'échelle la projection ainsi obtenue pour avoir en nombre le second terme du rapport cherché. Dans cette opération l'unité doit être placée sur la projetée, de manière à ce qu'une de ses extrémités coïncide avec l'origine; une seule ordonnée suffit alors pour opérer sa projection.

Fig. 3. Lemme deuxième. Si l'on voulait, au contraire, projeter une grandeur donnée d'une ordonnée sur l'autre dans un rapport donné en nombre et traduit en grandeurs linéaires $b \div a$ ($\left\{ \begin{array}{l} \text{l'antécédent} \\ \text{le dénominateur} \end{array} \right\}$ du rapport exprimant dans tous les cas la projection du $\left\{ \begin{array}{l} \text{conséquent} \\ \text{numérateur} \end{array} \right\}$). Il faudra

porter le numérateur, à partir de l'origine, sur la conjuguée dont une partie est à projeter, et placer le dénominateur sur l'autre conjuguée, également à partir de l'origine; en joignant par une droite hd les extrémités libres des deux termes du rapport ainsi disposés, on obtiendra la direction des ordonnées parallèles qui opèrent la projection dans le rapport demandé, et, pour parler graphiquement, dans le sens de a à b . Il faut ici, nécessairement, se servir de l'origine comme point de départ, parce que ce point étant toujours projeté sur lui-même est le seul dont on puisse connaître d'avance la projection.

Fig. 3. Multiplier ensemble deux quantités, c'est en chercher une troisième qui soit avec l'un des facteurs dans le même rapport qui existe entre l'autre facteur et l'unité. Donc le produit de la multiplication de deux grandeurs linéaires a et b s'obtiendra en projetant, entre deux conjuguées, soit le facteur a dans le sens de 1 à b , donné par la direction id , soit le facteur b dans le sens de 1 à a , donné par la direction lh ; la projection $oe = om$ obtenue dans les deux cas donnera en grandeur linéaire le produit cherché.

DIVISION.

Fig. 4. La division étant l'inverse de la multiplication, le quotient de a divisé par b s'obtiendra en projetant la grandeur qui correspond à l'unité linéaire dans le sens de b à a donné par la direction dc . Si on projetait, au contraire, la même unité dans le sens de a à b , en la plaçant pour cela sur la conjuguée oc , on aurait pour résultat une grandeur équivalente au quotient de b divisé par a .

De même que nous l'avons remarqué pour l'addition, il existe une soustraction à indice multiple. La division ainsi comprise comporte deux formes différentes; on peut avoir à chercher combien de fois une grandeur linéaire se trouve contenue dans une autre; et on peut avoir à diviser

une ligne en un certain nombre de parties égales. Dans le premier cas, les deux termes étant donnés, on cherche l'indice; dans le second, ayant l'indice et le total, on cherche le terme à soustraire.

La première de ces deux opérations correspond au problème bien connu qui consiste à mesurer deux lignes l'une par l'autre. La seconde se réduit à partager une ligne en un certain nombre donné de parties égales.

On obtient, comme on sait, la division d'une droite en parties égales par deux procédés tout à fait élémentaires, et qui consistent, tous deux, à projeter sur la grandeur donnée les n divisions égales qu'on détermine à volonté sur une seconde droite, par l'addition multiple d'une unité arbitraire.

Premier procédé. — On prend pour origine une des extrémités de la droite à diviser; on fait passer la droite auxiliaire par cette origine, qui sert en même temps de point de départ à l'addition multiple; et, quand celle-ci est terminée, on projette les n subdivisions qu'elle fournit dans le sens du total de l'addition à la totalité de la grandeur donnée.

Deuxième procédé. — La droite auxiliaire est menée parallèlement à celle qu'il s'agit de diviser; on y choisit à volonté le point de départ de l'addition multiple, qui reste alors indéterminé, et les subdivisions obtenues sont projetées polairement d'une ligne sur l'autre, à partir du point de rencontre des deux côtés obliques du trapèze que déterminent les extrémités des deux parallèles à projeter. Ce pôle peut ainsi occuper deux positions, l'une extérieure et l'autre intérieure à ces deux lignes. Le deuxième procédé offre, comme on voit, cela d'avantageux, qu'il n'y a qu'une seule parallèle à mener dans la figure.

On augmente beaucoup la précision du premier, en décrivant de l'origine, comme centre, une suite d'arcs qui passent par les subdivisions de l'addition multiple; ces

arcs sont prolongés jusqu'à ce qu'ils viennent rencontrer une seconde droite auxiliaire qui part également de l'origine, et qui vient aboutir à l'extrémité de la corde que détermine, dans le plus grand des cercles, l'ordonnée qui projette le total de l'addition sur l'extrémité de la ligne à diviser. Les cordes symétriques à cette dernière, lui étant toutes parallèles, opèrent la projection demandée; et leur direction, résultant alors d'une double subdivision identique exécutée au compas, laisse bien moins d'incertitude sur la justesse du tracé qu'elles effectuent.

Nous allons indiquer un *troisième moyen* d'obtenir la division d'une droite en parties égales, sur lequel nous devons plus particulièrement insister, parce que, d'une part, il se rattache à la géométrie des alignements, et que, de l'autre, il est susceptible de fournir un instrument de division assez simple, applicable aux tracés de cabinet. Il est fondé sur une propriété de la parabole dont nous donnerons plus tard la démonstration, et dont voici l'énoncé :

Si on subdivise une tangente quelconque à la parabole en parties égales, à partir de son point de contact, et si, par les n points de division, on mène autant d'autres tangentes à la courbe, on obtiendra un réseau de lignes dont chacune sera divisée en parties égales par sa rencontre avec toutes les autres. De plus, une autre tangente quelconque sera divisée par ce réseau dans les mêmes conditions d'égalité; excepté que, pour cette dernière, le point de contact ne fera plus partie des subdivisions égales.

La proposition réciproque a lieu : si, deux lignes étant données, on opère sur chacune d'elles une addition multiple, quels que soient le point de départ, et l'unité employée à chaque addition, les proposées et les transversales qui joindront de l'une à l'autre les termes de même indice seront tangentes à une même parabole.

Les deux tracés élémentaires rappelés ci-dessus rentrent, comme cas particuliers, dans ce théorème général.

Il suit de la proposition précédente qu'on peut parvenir à la division d'une ligne en parties égales sans avoir de parallèles à tracer. En voici le moyen : Faites passer, *fig. 5*, une droite arbitraire *bc* par une des extrémités de la ligne à diviser *ab*; opérez encore sur la première de ces droites l'addition multiple à indice *n*, qui a le point *b* pour origine; terminez le triangle *abc*, que les deux grandeurs totales déterminent; exécutez sur le dernier côté *ac*, que vous prolongerez à cet effet, une seconde addition multiple de même indice dont sa propre grandeur fournira l'unité, et dont le point de départ coïncidera avec l'extrémité de la proposée; joignez enfin, d'une addition à l'autre, les points qui portent un même numéro, et les lignes de jonction opéreront sur la proposée une division en parties égales, dont l'indice dépendra, comme on va le voir, du sens dans lequel aura été exécutée la seconde addition. Ainsi, quand cette dernière aura été dirigée dans le sens *ad* de la proposée, la transversale zéro manquera dans la figure, ou plutôt elle se superposera à la ligne à diviser; par conséquent, la subdivision à indice 1 y restera indéterminée. C'est celle qui correspond sur *ab* au point de contact parabolique; on trouvera sa place en rapportant à partir de l'origine la subdivision immédiatement suivante.

Quand, au contraire, la deuxième addition se prolongera dans le sens *ac* de la première, ce sera la transversale à indice 1 qui manquera, par une raison absolument identique; et, tandis que dans le cas précédent on avait obtenu $n + 1$ subdivisions égales sur la proposée, on n'en obtiendra plus dans celui-ci que $n - 1$. Mais il n'y en aura cette fois aucune à dédoubler; et, par conséquent, c'est à cette dernière disposition qu'il conviendra d'accorder la préférence, sauf certains cas particuliers: celui,

par exemple, où l'on voudrait obtenir immédiatement le double de la $n + 1^{\text{me}}$ partie d'une ligne; n étant un nombre pair.

De ce que, en procédant de la même addition multiple auxiliaire à indice n , on peut, à volonté, obtenir les $n + 1$ ou les $n - 1$ parties de la droite à diviser, selon le sens où la deuxième addition se trouve exécutée, il en résulte encore que si, *fig. 6*, à partir de l'origine et sur la droite auxiliaire bc , on suppose connue d'avance la série infinie de ses aliquotes procédant par $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots \frac{1}{n}$, ce qui revient à y marquer les premiers termes seulement des additions multiples à indice $n \dots 5, 4, 3$ et 2 , en joignant ces subdivisions au point c' , on obtiendra, sur la proposée, la série $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9} \dots \frac{1}{2n-1}$; tandis que si on les joint au point d' , on obtiendra la série $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6} \dots \frac{2}{n+1}$.

Ces relations, nécessairement réciproques entre les droites bc et ba , dérivent, comme conséquence immédiate, des propriétés que nous venons de signaler dans le réseau parabolique de la *fig. 5*. Elles permettront, en ne faisant usage que des trois termes ad' , ac' et ac , d'obtenir cependant toutes les subdivisions fractionnaires de la proposée. Et, pour n'en citer qu'un exemple qui ne manque ni d'élégance ni de simplicité, il nous suffira de faire remarquer que les deux transversales qui aboutissent sur bc à la subdivision $\frac{1}{2}$ opèrent complètement la division ternaire de la proposée ba ; résultat qu'on peut déduire soit de la relation établie ci-dessus entre les premiers termes des trois séries, soit en remarquant que si les aliquotes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc., au lieu d'occuper sur bc la moitié qui correspond au point b , occupaient celle qui aboutit au point c , pour que les mêmes relations existassent entre

les deux séries dérivées, il suffirait de changer l'un pour l'autre les points de départ *c* et *d* des transversales.

Le réseau complet des tangentes étant une fois établi à demeure sur un plan, si l'on y fait mouvoir une droite de grandeur donnée, rapportée sur le tranchant d'une règle à biseau, ou, simplement, sur le pli rectiligne d'une feuille de papier, de manière à ce que sa direction reste constamment tangente à la parabole que le réseau enveloppe, toutes les fois que ses extrémités viendront s'appuyer sur deux lignes quelconques du réseau, les $n - 1$ tangentes intermédiaires diviseront cette droite en n parties égales. En variant sa position, il sera donc possible de la diviser mécaniquement en un nombre de parties compris entre 2 et $n - 1$, n exprimant celui des tangentes dont la figure se trouvera composée.

Cette division mécanique pourrait encore s'opérer par superposition, et en faisant varier le réseau lui-même au lieu de la ligne à diviser, pourvu que celui-ci fût établi sur une surface de matière transparente; l'instrument serait alors, par rapport à la division linéaire, ce qu'est le rapporteur en corne par rapport à la division circulaire.

Il nous reste à parler de la première des trois formes que peut prendre la division graphique, celle dont tous les termes sont linéaires.

La question, quand elle est ainsi posée, n'a de sens et ne comporte de solution que lorsque la ligne à diviser mesure une surface : sans cela, cette espèce de division ne serait pas l'inverse de la multiplication superficielle.

La surface à diviser, quand elle est mesurée par une ligne, se trouvant nécessairement rapportée à une unité superficielle carrée dont l'unité linéaire constitue le côté, c'est en projetant cette dernière unité dans le sens du diviseur au dividende que l'on obtient le quotient cherché, c'est-à-dire le deuxième côté d'un rectangle équi-

valent à la surface à diviser, le diviseur formant l'autre côté de ce nouveau rectangle.

On peut considérer ici le diviseur comme constituant une nouvelle unité à laquelle on veut ramener la mesure de la surface proposée, et l'on voit que pour obtenir la ligne qui exprimera cette mesure en fonction de l'unité nouvelle, il faut projeter l'ancienne unité dans le sens de la nouvelle unité à l'ancienne surface. Les deux surfaces linéaires sont ainsi dans le rapport inverse des unités qui les complètent ; et de cette relation résulte forcément l'identité des superficies que renferment les deux rectangles.

Quand la division linéaire devra être appliquée à un produit cubique exprimé linéairement, comme un pareil produit s'obtient par deux multiplications superficielles successives, et comme pour exécuter ces deux opérations on peut soit adopter la même unité, soit employer une unité différente à chacune d'elles, il ne faudra jamais perdre de vue, en opérant sur des produits de ce dernier genre, qu'une première division ayant été exécutée au moyen de l'une des unités, la seconde ne peut plus avoir lieu qu'en faisant usage de l'unité restante.

Ces sortes de produits cubiques représentent la hauteur d'un parallépipède qui serait équivalent à celui que déterminent les trois facteurs primitifs, et dont la base serait formée par le rectangle des deux unités. Quand les deux unités sont égales, la base redevient un carré, et l'on rentre dans le système ordinaire des cubatures.

La règle générale de la division à quotient et à facteurs linéaires est donc que pour avoir le quotient $Q = \frac{A}{B}$,

il faut projeter l'unité dans le sens inverse où se présente le rapport, dans le sens de B à A. Quand la division admet un facteur en chiffres, c'est-à-dire un indice, elle rentre

dans l'une des deux formes multiples : ainsi $\frac{A}{3} = B$ et $\frac{A}{B} = 3$ sont dans ce dernier cas. $\frac{12}{3} = B$ et $\frac{12}{B} = 3$ n'ont aucun sens, si 12 n'exprime pas des unités linéaires; et alors ces expressions rentrent dans les deux suppositions précédentes. Il en est de même de $\frac{12}{3} = 4$, qui ne saurait être exécutée graphiquement qu'en donnant des valeurs linéaires soit au numérateur et au quotient, soit au numérateur et au dénominateur; et, sous cette dernière forme, elle fournira à volonté : 1° un quotient linéaire; 2° un sens de projection; 3° un quotient en chiffres, selon que le problème à résoudre comportera l'une ou l'autre de ces trois solutions.

Pour traduire en nombre ces résultats de la multiplication et de la division graphique, il n'y a, comme nous l'avons déjà remarqué, qu'à les évaluer, en les comparant à l'échelle; et pour les traduire en superficie, il suffira d'avoir égard à l'unité linéaire qu'on aura adoptée.

FORMATION DES PUISSANCES.

D'après les règles que nous venons de donner pour la multiplication, la deuxième puissance d'une grandeur linéaire a s'obtient en projetant cette même grandeur dans le sens de 1 à a donné par la direction bc , *fig. 7*. La projection od sera la grandeur a' . La deuxième puissance de a étant ainsi déterminée de grandeur et de position sur la conjuguée oe , pour obtenir a' , il suffira, par la même raison que ci-dessus, de reprojeter à son tour la grandeur $od = a'$ sur la première conjuguée dans le même sens de 1 à a , qui prend alors la direction hg antiparallèle à bc , et ainsi de suite pour les autres puissances supérieures de la même racine; de façon que, lorsque l'on aura déterminé, une fois pour toutes, les deux di-

rections bc et hg nécessairement antiparallèles entre elles, qui opèrent la projection réciproque des deux conjuguées dans le sens sus-mentionné de 1 à a (voir *lemme deuxième*), il n'y aura plus que deux séries de parallèles à mener à ces directions ; et chaque parallèle partant sur l'une des conjuguées de l'extrémité libre d'une puissance quelconque, déterminera sur l'autre conjuguée la puissance d'un ordre supérieur ; les puissances paires étant distribuées d'un seul et même côté sur oe , et les puissances impaires de l'autre sur om ; les paires projetées dans la direction bc , et les impaires dans la direction hg .

EXTRACTION DES RACINES.

L'extraction de la racine carrée est l'inverse de la construction qui donne la deuxième puissance ; c'est encore une division superficielle ; la ligne dont on veut extraire la racine doit nécessairement exprimer une surface.

Soit a , *fig. 8*, la grandeur dont on demande la racine carrée, et soit b l'unité linéaire qui mesure cette grandeur. On soustrait, par superposition, l'unité od de la grandeur donnée oc ; sur le reste dc , comme diamètre, on décrit une demi-circonférence ; et, enfin, du point o où l'unité et oc ont une limite commune, on mène une tangente à cette circonférence. La grandeur de cette tangente, comprise entre son point de départ o et son point de contact e , donnera la racine carrée demandée. L'exactitude de ce tracé devient évidente en remarquant que les lignes ed et ec qui joignent le point de contact aux deux extrémités du diamètre sont antiparallèles, si on compare leurs directions à celles de la tangente oe et du diamètre oc ; en prenant, en conséquence, ces deux dernières lignes pour conjuguées, on reconnaît immédiatement sur la figure l'inverse de la construction qui, si l'on avait à élever au carré la grandeur oe , donnerait pour résultat la ligne oc dont nous avons à chercher la racine.

Ces deux lignes sont donc bien réellement entre elles dans le rapport de a à $\sqrt{a}$.

Il y a une autre construction également usitée pour résoudre le problème précédent; dans celle-ci, *fig. 9*, au lieu de soustraire l'unité, on l'ajoute, au contraire, à la quantité a dont on veut obtenir la racine; sur leur somme cd , on décrit une demi-circonférence, et l'ordonnée oe , élevée au point o où les deux grandeurs s'aboutent, mesurée entre le diamètre et la circonférence, est la racine carrée cherchée. On le démontre également, en joignant le sommet e de cette ordonnée aux deux extrémités c et d du diamètre, et en reportant le triangle eod en eod' ; car, dans cette position, on retrouve encore la construction qui servirait à élever oe à la deuxième puissance: il n'y a, pour cela, qu'à prendre pour conjuguées le diamètre oc du cercle et son ordonnée oe , et à remarquer que les deux lignes qui partent du point e sont antiparallèles par rapport à ces deux conjuguées, sur lesquelles elles interceptent, du côté qui leur est commun, la racine cherchée, et de l'autre le carré donné et l'unité de mesure.

Le carré construit sur l'ordonnée du cercle étant équivalent en surface au rectangle qui aurait pour côtés les deux segments correspondants du diamètre, et cette relation se trouvant tout à fait indépendante de l'unité linéaire adoptée pour mesure, il s'ensuit que les deux directions des obliques qui partent de l'extrémité supérieure de cette ordonnée pour aller aboutir aux deux extrémités du diamètre, projetteront ces deux dernières lignes, entre elles, d'un côté, dans le sens de $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})$ à b , et, de l'autre, dans le sens de $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})$ à a . Substituant, au lieu de a et de b , les expressions équivalentes $\sqrt{b} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, les deux rapports de projection deviendront, par la suppression des facteurs communs, $\sqrt{a}$ à $\sqrt{b}$ et $\sqrt{b}$ à $\sqrt{a}$.

On peut donner une forme tout à fait géométrique à la

démonstration de cette propriété des deux obliques : soient deux surfaces quelconques mesurées linéairement par A et B ; si on les transforme en deux carrés équivalents , et qu'on fasse subir la même transformation à leur somme $A+B$, les trois côtés de ces carrés seront les racines carrées des trois surfaces primitives, et constitueront un triangle rectangle. Donc, dans ce triangle cde , et par rapport à l'angle droit, l'hypothénuse projettera dans le sens de $\sqrt{A}$ à $\sqrt{B}$, et réciproquement ; donc, le même sens de projection aura lieu dans les deux triangles semblables coe et doc . Or, comme $\sqrt{A}$ et $\sqrt{B}$ sont deux grandeurs tout à fait indépendantes de l'unité de mesure à laquelle les surfaces A et B peuvent se trouver rapportées , et comme , en rapportant ces dernières à l'hypoténuse cd , elles auront pour mesure linéaire les deux segments correspondants a et b que l'ordonnée y détermine , segments directement proportionnels à A et B , puisqu'ils mesurent les mêmes grandeurs , il s'ensuit que l'oblique ed projettera dans le sens de $\sqrt{a}$ à $\sqrt{b}$, et l'oblique ec dans le sens de $\sqrt{b}$ à $\sqrt{a}$, toutes les fois que a et b seront considérés comme mesurant des surfaces.

La même figure peut encore servir à faire connaître la marche que suivent la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique, quand les grandeurs par rapport auxquelles ces moyennes sont prises tendent à se rapprocher entre elles. Ainsi , supposons deux grandeurs dont la somme soit constamment égale au diamètre cd , leur moyenne arithmétique sera constante et égale au demi-diamètre, soit au rayon du cercle décrit sur cd . D'un autre côté, leur moyenne géométrique se trouvant égale à l'ordonnée du même cercle , élevée au point où les deux grandeurs s'aboutent, ce point tendra d'autant plus à se rapprocher du centre que la différence des deux grandeurs deviendra moindre ; et, en supposant cette différence très-petite, on voit que l'on pourra , sans erreur sensible , supposer

que l'ordonnée se trouve égale au rayon : ce qui revient à confondre la valeur des deux moyennes.

L'extraction des racines d'un degré supérieur ne pouvant s'obtenir par la ligne droite et le cercle, nous en renvoyons le tracé au chapitre des progressions, dans lequel nous ferons connaître les moyens graphiques qui servent à les déterminer.

PROPORTIONS.

Proportions par différence. — Un rapport par différence étant le reste de la soustraction opérée entre les deux termes qui le composent, pour trouver un quatrième terme dans une proportion par différence dont trois termes sont connus, il suffira d'ajouter ou de retrancher au terme isolé, selon qu'il sera un antécédent ou un conséquent, le reste de la soustraction opérée sur les deux termes qui forment un rapport complet.

Proportion par quotient. — Une proportion par quotient étant l'égalité de deux rapports : $a \div b = c \div x$, pour obtenir le quatrième x , il suffira de projeter c , entre deux conjuguées, dans le sens de a à b ; construction identique à celle qui nous a servi à trouver le produit de deux grandeurs linéaires, en supposant que a , dans cette proportion, représente l'unité de mesure : ce que l'on peut toujours momentanément admettre, sans rien changer au tracé, et, par conséquent, sans altérer le résultat de l'opération qu'on s'était d'abord proposée, puisque, d'après le *lemme premier*, l'égalité de deux rapports résulte seulement du parallélisme des ordonnées qui en projettent les quatre termes entre deux conjuguées, et ne dépend en aucune manière du choix de l'unité de mesure à laquelle les lignes qui les composent se trouvent accidentellement rapportées. Règle générale, dans l'art du trait, deux rapports sont égaux quand les deux antécédents, ayant été placés additivement ou

soustractivement sur une conjuguée, et les conséquents se trouvant placés d'une manière semblable sur l'autre conjuguée, les lignes qui joignent les extrémités homologues sont parallèles entre elles. La direction de ces ordonnées parallèles constitue ce que nous avons appelé le sens de projection.

Quand, trois termes étant donnés, il s'agit d'en trouver un quatrième qui soit avec l'un des trois dans un rapport inversement proportionnel à celui des deux autres, cette relation, ainsi exprimée, occasionne assez souvent des méprises, ou du moins des incertitudes de tracé.

Mais, si l'on veut se rappeler que l'égalité *inverse* de deux rapports correspond à une égalité *directe* de surface, et que, dire que $a : a'$ inversement comme $b : b'$, c'est poser : $a \times b = a' \times b'$, toute indécision disparaîtra.

L'inversion d'un rapport n'a d'importance que lorsque cette relation s'applique à des quantités concrètes : ce qui exige que chaque rapport pris à part exprime des grandeurs de même nature.

Ayant placé les deux termes qui constituent le produit connu séparément sur deux conjuguées, à partir de l'origine, on y placera le troisième à volonté, mais toujours, cependant, à partir de l'origine; considérant alors les conjuguées comme deux asymptotes hyperboliques, et la transversale qui donne le sens de projection du produit connu $a \times b$, comme une première tangente à l'hyperbole, il ne s'agira plus que de faire passer par l'extrémité libre du troisième terme a' une seconde tangente à la même courbe, ce qui s'opère, comme on sait, au moyen d'une couple de parallèles qui projettent l'extrémité des tangentes entre elles. Cette nouvelle tangente, ou pour mieux dire la parallèle qui projette son extrémité inconnue (car la deuxième tangente est inutile à tracer, et il suffit de pouvoir se rendre compte de sa position), viendra intercepter sur l'autre conjuguée, à partir de

l'origine, le quatrième terme cherché, par cela seul que la surface du triangle détaché par une tangente quelconque entre les asymptotes, est une quantité constante pour une même hyperbole. La solution ainsi envisagée, il n'y a plus moyen de se tromper dans la disposition des termes et dans le tracé final; car, en se rendant compte de la situation de la courbe et de ses deux tangentes, on s'apercevrait aussitôt des erreurs qu'on pourrait avoir commises.

Une considération à peu près analogue sert à obtenir, par tâtonnement, deux moyennes proportionnelles géométriques successives entre deux termes donnés.

Solution. — On disposera les deux termes traduits en grandeurs linéaires, de manière à ce qu'ils forment les deux côtés d'un triangle rectangle; et, ces deux côtés prolongés au delà du sommet étant pris pour asymptotes, on tracera dans l'angle opposé qu'ils comprennent une hyperbole équilatère dont l'hypoténuse du triangle fournira la première tangente; l'on fera ensuite mouvoir une équerre jusqu'à ce que, son angle droit s'appuyant sur une des asymptotes, un de ses côtés soit tangent à la courbe, tandis que l'autre passera par une des extrémités de l'hypoténuse du triangle primitif; arrivé à cette position, qu'on peut vérifier par retournement, le côté tangent à la courbe interceptera sur les asymptotes, à partir du sommet, les deux moyennes proportionnelles cherchées, par cela seul que les parallèles qui projettent entre elles les deux tangentes font alors un angle droit avec la direction de la seconde de ces lignes; ce qui fournit deux triangles rectangles successifs et tellement disposés qu'il suffit d'écrire leurs relations de moyennes géométriques pour trouver à leur place les deux termes qui constituent la série proportionnelle demandée.

Ce qui précède est fondé sur la propriété suivante : dans un trapèze quelconque, les deux côtés non parallèles

peuvent être considérés, par rapport aux deux diagonales, comme deux tangentes à une même hyperbole dont les deux diagonales forment les asymptotes ; et il suffit, pour achever la courbe, de construire au moyen du trapèze primitif, dont un des côtés non parallèles restera constant, et dont les diagonales resteront pareillement invariables, une suite de trapèzes déterminés par les lignes fixes du premier ; le deuxième côté non parallèle enveloppera la courbe. Les divers points de contact seront, comme on sait, situés au milieu de la corde asymptotique interceptée par les diagonales sur la tangente fixe et sur les tangentes mobiles.

PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE ET PAR QUOTIENT.

Dans une progression par différence, chaque terme se composant de celui qui le précède augmenté d'une quantité constante, il est évident qu'une droite oa , *fig. 10*, divisée en parties égales à la différence donnée, représentera graphiquement une progression de ce genre. La longueur totale de la droite constitue le dernier terme, et tous les autres termes, qui sont alors considérés comme superposés subtractivement à celui-ci, peuvent se mesurer à volonté à partir de l'une ou l'autre des deux extrémités prises pour origine.

Si l'on projette cette progression sur une autre conjuguée ob , il en résultera évidemment une progression de même nature, et que nous nommerons, ainsi que la précédente, progression à termes superposés. Nous appellerons, au contraire, progression par différence à termes distincts la succession des ordonnées parallèles qui, dans cette même figure, servent à projeter, terme à terme, les deux progressions primitives ; car il n'est pas difficile de reconnaître que chacune de ces ordonnées dépasse celle qui la précède d'une quantité constante, et que leur ensemble constitue une autre progression de même nature

et composée d'un même nombre de termes, mais disposés entre eux, cette fois, d'une manière tout à fait distincte.

Au moyen de cette figure, et des relations que nous venons d'y signaler, on résout les problèmes suivants par le tracé que nous allons placer en regard :

	ÉTANT DONNÉS	TROUVER	SOLUTIONS.
Dans une progression par différence.	Le dernier terme et la raison.	Le nombre de termes.	Porter sur une ligne une grandeur donnée, autant de fois qu'elle le comporte.
	Le nombre de termes et le dernier.	La raison.	Trouver la même partie d'une ligne donnée.
	Le nombre de termes et la raison.	Le dernier.	Ajouter une ligne à elle-même un certain nombre de fois.

Constructions géométriques élémentaires, et dont il doit nous suffire de rappeler ici l'énoncé, puisque nous avons déjà eu lieu de nous en occuper, en traitant de la soustraction multiple.

Pour obtenir la somme d'un certain nombre de termes donnés dans une progression par différence, nous mettrons d'abord cette progression sous la forme à termes distincts, *fig. 10*, puis, reproduisant la figure en sens inverse, nous ferons coïncider, par juxtaposition, les deux conjuguées *ob* et *o'b'*, qui seront mises en regard, de manière à ce que tous les termes de l'une des progressions soient le prolongement d'un des termes de l'autre; par cette opération, la somme cherchée, ayant été ajoutée à elle-même, se trouvera doublée, et se présentera sous la forme d'une suite d'un même nombre de termes distincts, tous égaux entre eux, puisqu'ils aboutissent à deux droites qui sont parallèles.

En sommant cette suite, par additions successives, et remarquant que le résultat d'une pareille addition est encore une progression par différence, l'on trouvera que le double de la somme cherchée est égal au dernier terme, du même rang, dans une autre progression ayant pour raison le premier terme plus le dernier.

CONSTRUCTION DES ÉCHELLES.

Avant de passer outre, nous avons à expliquer la construction et l'usage des échelles; on va bientôt comprendre pourquoi cette explication a été retardée jusqu'à ce moment.

La suite naturelle des nombres formant une progression par différence, dont la raison est l'unité, la série linéaire qui lui correspond dans l'art du trait, devait prendre nécessairement les formes graphiques qu'affecte cette espèce de progression; et c'est, en effet, ce qui a lieu: la forme la plus simple que l'on puisse donner aux échelles est celle de la progression par différence à termes superposés, *fig. 11*. Elle présente l'unité ajoutée bout à bout à elle-même un certain nombre de fois. Ce nombre correspond ordinairement aux grandes périodes décimales de la série naturelle; et on a soin de distinguer à leur tour, s'il y a lieu, les périodes intermédiaires, afin qu'on puisse trouver, au premier coup d'œil, sur l'échelle, soit les unités simples, soit les différents groupes décimaux que comporte son étendue linéaire; ceux-ci pouvant être considérés, à leur tour, comme des unités d'un ordre plus élevé, et constituant une autre série superposée à la série primitive qui forme l'échelle adoptée.

Comme dans une infinité de circonstances, on peut avoir besoin d'évaluer des grandeurs moindres que l'unité, on y parvient en ajoutant à l'échelle primitive, à partir de son origine, point qui correspond en même temps à sa limite d'annulation et au zéro de la suite naturelle des nombres, une autre progression par différence, à termes superposés, dont le dernier terme est égal à l'unité elle-même, et dont la raison est une des parties aliquotes de l'unité, aliquote toujours décimale quand l'échelle est décimale. Cette partie fractionnaire de l'échelle est d'un usage encore plus commode, et devient susceptible d'une lecture et d'une appréciation bien plus exacte, quand, au lieu d'une pro-

gression à termes superposés, on y emploie une progression à termes distincts. Dans ce dernier cas, l'échelle s'élargit pour correspondre, terme à terme, avec la progression fractionnaire distincte, et prend la forme que présente la *fig. 12*, sur laquelle il devient possible d'évaluer en parties de l'unité les plus petites grandeurs appréciables au compas, soit qu'elles se présentent isolées, soit que par leur addition à des lignes comportant un nombre exact d'unités entières, elles constituent une grandeur fractionnaire.

La notation en chiffres destinée, comme nous l'avons déjà dit plus haut, à faire connaître les relations de chaque partie de l'échelle avec la suite naturelle des nombres, s'applique également à la subdivision fractionnaire; les indications doivent en être partout assez rapprochées pour qu'en présentant à l'échelle une grandeur quelconque, directement ou par l'intermédiaire d'un compas, on puisse y lire immédiatement le nombre qui s'y rapporte s'il est entier, comme aussi évaluer à l'œil le nombre fractionnaire qui correspond à la grandeur présentée, quand cette dernière tombe entre deux des subdivisions que l'échelle comporte dans son tracé.

Toute opération graphique, pour donner des grandeurs comparables, devant en général être rapportée à une même unité de mesure, c'est au moyen de l'échelle correspondante à cette unité que s'obtient cette comparaison.

Quand la grandeur à évaluer se trouve moindre que l'échelle, on la rapporte immédiatement sur cette dernière, soit directement par juxtaposition, soit par l'intermédiaire du compas; et c'est sur l'échelle que s'opère alors toute la comparaison: dans ce cas, elle se réduit à la lecture du chiffre qui correspond à la dimension présentée. Quand, ce qui arrive fréquemment, la ligne à mesurer se trouve au contraire plus grande, on commence à opérer sur elle par soustractions successives, en y portant le

plus fort groupe décimal que l'échelle comporte dans sa longueur ; et, lorsque cette soustraction multiple est terminée, le reste fractionnaire qui en provient est à son tour évalué sur l'échelle. Comme la première de ces opérations donne un groupe décimal d'unités toujours très-facile à traduire en nombres ronds, il suffit d'ajouter à ce nombre la valeur du reste fractionnaire, pour que l'expression de la mesure cherchée soit complète.

On emploie encore un autre procédé que nous ne devons pas passer sous silence pour apprécier, sur une échelle, les grandeurs fractionnaires qui tombent entre ses subdivisions. Ce procédé consiste dans la comparaison d'une échelle auxiliaire qui a reçu le nom de nonius ; il n'est applicable que dans les circonstances où la comparaison des lignes s'exécute par juxtaposition, et dans cette supposition, l'échelle est forcément ramenée à la forme linéaire.

Fig. 13. Supposons qu'une seconde ligne ab glisse le long de celle sur laquelle se trouvent portées les divisions de l'échelle, et que l'on désire évaluer en nombre le mouvement opéré par un des points a de la ligne mobile : la chose sera très-facile, quand le point mobile a , partant d'une des divisions de l'échelle, arrivera à coïncider, à la fin de son mouvement, avec une des divisions subséquentes ; mais il y aura incertitude toutes les fois qu'il s'arrêtera entre deux. Pour remédier à cet inconvénient, on fait précéder le point curseur d'une petite échelle auxiliaire dont il forme l'origine, et dont les autres subdivisions sont disposées de manière à ce que le même espace ab qui comprend neuf subdivisions sur le vernier ou l'échelle fixe, en présente dix sur l'échelle auxiliaire en regard. Par cette disposition, chaque subdivision du nonius se trouve en retard de $\frac{1}{10}$, quand la division qui la précède immédiatement coïncide avec une des divisions de l'échelle fixe : la chose étant évidente pour la division qui se trouve la plus voisine du point curseur a , devient

pour les autres une conséquence de l'égalité de rapport qui existe entre elles. Chaque coïncidence successive des divisions du nonius avec les neufs divisions qu'il embrasse sur le vernier de l'échelle indiquera donc dans le point curseur un mouvement de progression équivalent à $\frac{1}{10}$ de ces mêmes divisions.

C'est principalement à la mesure des échelles en arcs de cercle que cet ingénieux procédé a été appliqué, et c'est, par conséquent, à la mesure des angles que l'avantage qu'il procure s'est fait le plus immédiatement sentir.

Dans les instruments de haute précision, c'est à la loupe qu'on évalue les coïncidences des divisions du nonius avec celles du vernier ou échelle fixe.

PROGRESSION PAR QUOTIENT.

Fig. 14. La progression par quotient étant formée d'une suite de termes tels que chacun est dans un rapport constant avec celui qui le précède ; pour rendre graphiquement une pareille relation, quand le premier terme et la raison seront donnés, il suffira de déterminer le sens des deux directions antiparallèles suivant lesquelles s'effectue la projection réciproque dans le rapport donné, entre deux conjuguées quelconques (*lemme deuxième*). Cela fait, on placera le premier terme de la progression sur l'une d'elles ; et il n'y aura plus, pour trouver les autres termes, qu'à projeter celui-ci une première fois dans la direction voulue, et à reprojeter ensuite alternativement d'une conjuguée sur l'autre, chaque projection successive, à partir de la première qu'on aura ainsi obtenue ; c'est $\frac{1}{2}$ comme on voit, ce que nous avons déjà exécuté, *fig. 7*, pour obtenir la grandeur des diverses puissances d'une même racine a . Cette identité de construction s'explique encore sans peine, en remarquant que la série $1 + a + a^2 + a^3$, etc., est elle-même une progression par quotient, dont le rapport est 1 à a ; et que, par conséquent, cette série de-

vait nécessairement affecter une des formes graphiques qui appartiennent à ce genre de progression.

Ce n'est pas sans motifs que nous disons : une des formes ; car , pour peu qu'on étudie le tracé que nous venons d'exécuter , on reconnaît bientôt que , conformément à ce que nous avons déjà eu lieu de remarquer pour la progression par différence , non - seulement on trouve dans cette figure la progression à termes alternatifs et superposés telle que nous venons d'en indiquer le tracé , et dont la raison est a à b ; mais une seconde série à termes également alternatifs et non superposés , dont l'une des conjuguées porte les termes pairs et l'autre les termes impairs placés additivement sur chacune d'elles en deux séries distinctes ; et enfin , une troisième progression à termes tout à fait distincts , qui se compose de la suite des transversales antiparallèles , au moyen desquelles s'est opérée la projection , ces trois progressions ayant toutes la même raison a à b .

Les propriétés que nous venons d'énoncer deviennent évidentes , si , prenant pour conjuguées les deux premières transversales cd et ce , on projette sur leur prolongement les transversales suivantes par des droites ef, fg, gh , etc., alternativement parallèles aux deux conjuguées primitives ; la figure ponctuée qui en résulte , nous présente alors le tracé d'une nouvelle progression à termes alternatifs et superposés ; et ceux-ci sont précisément la succession des transversales de la figure tracée en plein. La raison de cette progression est donnée par ses deux premiers termes cd à de ; et , à cause de $cd = c'd'$, ce rapport se trouve , comme nous l'avions annoncé , celui de a à b . Les transversales ponctuées nous présentent à leur tour la progression à termes distincts que les conjuguées pleines contiennent en termes alternatifs „ ajoutés bout à bout par série paire et par série impaire ; de sorte que la démonstration de ce que nous avons avancé ressort , en

quelque sorte , de la dépendance réciproque de ces deux figures : les lignes de l'une ayant leurs égales sur l'autre , comme parallèles comprises entre parallèles , et tellement disposées , que les propriétés des unes sont la démonstration immédiate des propriétés identiques que possèdent leurs relatives.

Au moyen de cette figure , on peut conclure immédiatement et expliquer les divers procédés graphiques qui servent à projeter entre deux conjuguées , une grandeur quelconque dans un sens donné a à b , ce sont les suivants :

1° Celui que nous avons déjà indiqué ci-dessus et que nous appelons *projections à termes superposés*.

2° Abouter les deux $\left\{ \begin{array}{l} \text{antécédents} \\ \text{conséquents} \end{array} \right\}$ connus sur l'une des conjuguées , et placer $\left\{ \begin{array}{l} \text{le conséquent} \\ \text{l'antécédent} \end{array} \right\}$ donné sur l'autre :

par cette projection on obtient $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'antécédent} \\ \text{le conséquent} \end{array} \right\}$ cherché , abouté à ce dernier , elle est dite à *termes aboutés*.

3° Superposer sur l'une des conjuguées les deux termes a et b du rapport connu , élever à leur extrémité deux ordonnées d'une direction telle , que celle des deux qui correspond $\left\{ \begin{array}{l} \text{à l'antécédent} \\ \text{au conséquent} \end{array} \right\}$ donné présente la grandeur du terme homologue , dans sa partie distincte , interceptée entre les conjuguées. La seconde ordonnée donnera dans les mêmes limites le quatrième terme cherché ; c'est la *projection à termes superposés et distincts*.

4° Abouter sur l'une des conjuguées les deux termes a et b à partir de l'origine , et opérer ensuite comme dans l'article précédent , c'est la *projection à termes aboutés et distincts*. Elle s'étend dans l'angle opposé au sommet.

Il se présente une difficulté qui rendrait souvent impossible le tracé qu'exigent ces deux dernières constructions : si la grandeur de la transversale qui constitue le

troisième terme donné était plus petite que la perpendiculaire abaissée de son point de départ sur la conjuguée opposée, la solution deviendrait impraticable. On obvie sans peine à cet inconvénient, en remplaçant la deuxième conjuguée par une autre qui intercepte un angle moindre, et qui rende possible les conditions du tracé. Un instrument spécialement affecté au calcul graphique : *le compas de proportions* est fondé sur la nécessité de ce rapprochement accidentel des deux conjuguées; à cet effet, celles qu'il porte sont mobiles autour de leur commune origine. Ces conjuguées présentent chacune une échelle identique, dont le zéro correspond à l'origine commune. Quand, sur l'une de ces échelles, on a superposé les deux grandeurs a et b à partir de l'origine, de l'extrémité de celle qui constitue $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'antécédent} \\ \text{le conséquent} \end{array} \right\}$ connu, et avec une ouverture

de compas égale au terme distinct (à la transversale), on cherche par tâtonnement et en rapprochant la deuxième branche de l'instrument, une ouverture angulaire qui permette aux conjuguées de former un triangle isocèle, dont la transversale doit occuper la base, ce qui arrive, au moment où la pointe libre du compas tombe sur la seconde conjuguée, au point qui correspond exactement sur l'échelle mobile à celui déjà occupé sur l'autre échelle par la pointe fixe. Toutes les transversales qui remplissent les mêmes conditions d'égalité se trouvant nécessairement parallèles entre elles, on voit comment la valeur du quatrième terme s'en déduit, et comment une autre ouverture de compas donne immédiatement ce quatrième terme, soit la seconde transversale parallèle à la première.

Le compas de proportion a donc pour objet principal d'opérer la projection des lignes entre elles dans un rapport quelconque, tout en dispensant d'avoir pour cela des parallèles à tracer. Il contient, en outre, plusieurs autres échelles qui sont destinées, soit à la mesure graphique des arcs, soit à celui du diamètre des boulets de

divers calibres, etc. Nous renvoyons ceux qui pourraient désirer une description plus complète de cet instrument, aujourd'hui à peu près négligé, aux ouvrages spéciaux qui ont été expressément composés pour en expliquer la construction et en indiquer les divers usages.

Nous pourrions au besoin trouver encore d'autres séries par quotient dans la *fig. 14*; nous indiquerons, parmi ces dernières, celles que forment les surfaces triangulaires et trapézoïdales semblables, comprises entre les conjuguées et les transversales successives, et dont la raison est 1 à a' . Sans insister davantage sur ce point, nous nous contenterons d'appeler de nouveau l'attention du lecteur sur la fécondité des conséquences qui peuvent, comme on voit, se déduire de la seule inspection des formes graphiques sous laquelle une seule série se présente.

Pour obtenir la somme d'un nombre de termes donnés, dans une progression par quotient, il faut encore la supposer tracée à termes tout à fait distincts, puis admettre que chacun d'eux est multiplié par la raison. Cette opération équivaudra à la multiplication de la somme totale cherchée, et s'effectuera graphiquement en faisant avancer tous les termes d'un rang. Elle doublera donc à partir du second, tous les termes de la série primitive, qu'elle dépassera d'un terme à son tour. Si nous soustrayons donc la série primitive de celle-ci, le reste, d'après les règles de la soustraction, se composera de la différence des seuls termes non-doublés; c'est-à-dire du premier de la série primitive et du dernier de la série qui a avancé d'un rang, et ce reste équivaudra nécessairement à ce que devient la série, quand, après l'avoir multipliée par la raison q , 1 : q étant alors le sens de projection, on la retranche une fois du produit obtenu, c'est-à-dire, quand on la multiplie par $q-1$. En divisant donc ce même reste par cette quantité ($q-1$), on aura la somme cherchée. Cette division opérée graphiquement entre les deux transversales extrêmes prises pour conjuguées, donnera la somme

cherchée. L'unité employée à cette division sera la même qui aura servi à multiplier la série par la raison q .

EXTRACTION GÉNÉRALE DES RACINES.

Pour parvenir à construire les racines plus élevées que le deuxième exposant, nous allons reprendre la *fig. 7*, qui donne la série des puissances de a , et la mettre sous une forme plus appropriée au but que nous nous proposons. Imaginons, pour cela, un assemblage de conjuguées partant toutes d'une même origine o , *fig. 15*, faisant toutes de l'une à l'autre un angle constant α , qui soit partie aliquote de la circonférence entière, et après les avoir ainsi disposées, distribuons sur chacune d'elles une portion du tracé qui, dans la *fig. 7*, donne les puissances successives de a ; de telle sorte, que l'unité soit portée sur celle de ces lignes qu'on choisira pour point de départ, la grandeur a sur la suivante, a^2 sur celle qui vient après, et ainsi de suite en opérant toujours dans le même sens. Par ce moyen, chaque angle α ne contiendra qu'une seule des transversales qui se tiennent bout à bout et en forme de lacet sur la *fig. 7*, et ces transversales formeront, dans la nouvelle figure, un polygone continu, non fermé, dont chaque côté aura pour propriété caractéristique de faire des angles constants, soit avec le rayon vecteur qui aboutit à son origine, soit avec celui qui passe par son extrémité, soit avec tout autre rayon qui le diviserait en parties proportionnelles; propriété que partagent également les diagonales ab , cd , etc., qui, dans ce polygone, soustendent un même nombre de côtés, c'est-à-dire un même nombre de fois l'angle α . De plus, d'après le tracé qui donne l'élévation aux puissances un quelconque de ces rayons vecteurs étant pris pour unité, et le suivant pour racine, les autres, placés à la suite, pris successivement et dans l'ordre naturel, donneront à leur tour les deuxième, troisième, qua-

trième, etc., puissances de cette racine; pourvu qu'il y ait entre tous ces rayons successifs, le même nombre d'angles α qu'il en a été compris entre les deux qui représentent l'unité et la racine.

Enfin, comme ces propriétés sont absolues et entièrement indépendantes, soit de la grandeur de l'angle α que l'on peut réduire à volonté, soit du rapport primitif 1 à a , duquel dépend l'inclinaison constante de toutes les transversales, eu égard aux rayons vecteurs qui leur correspondent, il s'ensuit qu'à la limite, chacun de ces polygones se transformera en une spirale $abcd$, etc., conservant toutes les propriétés ci dessus mentionnées; et qu'une quelconque de ces spirales, qui varieront seulement entre elles par l'inclinaison constante de la tangente sur le rayon vecteur, pourra servir à résoudre les divers problèmes qui concernent les grandeurs réciproques des puissances et de leurs racines.

Puisque sur cette figure, et d'après les propriétés susmentionnées, la deuxième puissance de a s'obtient en ajoutant une fois à lui-même, dans le sens de 1 à a , l'angle compris entre les deux rayons vecteurs égaux à ces deux dernières quantités; la troisième, en ajoutant deux fois à lui-même le même angle; la $m^{\text{ème}}$ en l'ajoutant $m - 1$ fois; et puisque la puissance m cherchée se trouve mesurée sur le rayon vecteur extrême ainsi obtenu :

Il s'ensuit, par la construction inverse, que la $\sqrt[m]{a}$ s'obtiendra, à son tour, en trisectant l'angle compris entre les rayons vecteurs 1 et a ; la $\sqrt[m]{a}$, en divisant ce même angle en quatre parties égales; la $\sqrt[m]{a}$ enfin, en divisant toujours ce même angle en m parties égales; le rayon le plus voisin de l'unité donnant, dans tous les cas, la grandeur de la racine cherchée $\sqrt[m]{a}$; tandis que les rayons suivants correspondront aux valeurs

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^2, \left(\sqrt[m]{a}\right)^3, \left(\sqrt[m]{a}\right)^4, \dots \left(\sqrt[m]{a}\right)^m.$$

Ces solutions exigent que l'on sache diviser un angle donné en m parties égales, ce qui nous offre un autre problème dépendant de l'art du trait, et que la progression par équi-différence mise sous forme de spirale, va nous donner à son tour le moyen de résoudre d'une manière générale.

Car, bien qu'on puisse exécuter ces divisions sur l'arc de cercle qui, en sa qualité de grandeur linéaire, est, comme nous l'avons déjà remarqué, la commune mesure des angles plans : comme les divisions de l'arc sont tantôt possibles par la règle et le compas, et tantôt impossibles, il sera plus simple et plus général de se servir pour cela de la spirale par équi-différence, au moyen de laquelle on ramène, par un procédé identique, la mesure de ces mêmes angles à celle de la grandeur linéaire qui constitue la différence des rayons vecteurs comprenant entre eux l'angle donné.

Transformons la progression par différence, en employant le même procédé que nous avons appliqué à la progression par quotient, nous arriverons ainsi à un second polygone, tel que chaque rayon vecteur aboutissant aux sommets successifs du contour polygonal, ou embrassant entre eux un même nombre de ses côtes, excédera celui qui le précède d'une même quantité. Et en passant à la limite, il en résultera une autre spirale, dans laquelle une suite quelconque de rayons vecteurs, procédant entre eux par angles égaux, présenteront des longueurs relatives procédant entre elles par équi-différence.

Par cette seule propriété, tous les problèmes dans lesquels il s'agit de modifier un angle par addition ou soustraction se trouveront ramenés, au moyen de cette courbe, à ne plus exiger que des additions et des soustractions linéaires; un seul exemple suffira pour en faire l'application et pour en montrer l'usage.

Supposons un angle donné quelconque à diviser en n

parties égales ; plaçons cet angle de manière que son sommet coïncide avec l'origine de la spirale par différence. Ses deux côtés, dans quelque sens qu'on le présente, deviendront deux rayons vecteurs de la courbe ; et pour résoudre le problème, il suffira d'intercaler, entre ces deux rayons, $n-1$ termes d'une progression par différence, dont on obtiendra la raison, en divisant en n parties égales la différence qui existe entre le premier et le dernier terme ; c'est-à-dire, entre les rayons mêmes qui forment l'angle donné ; ou seulement le dernier terme quand le premier sera égal à zéro. Les $n+1$ rayons formant une progression par différence, procéderont nécessairement entre eux par angles égaux.

La spirale par différence devient donc le complément indispensable de la spirale par quotient, dans tous les problèmes dont les solutions dépendront d'opérations analogues à exécuter sur des angles donnés. Il en résulte que si, du même pôle, on trace ces deux spirales de manière à ce que le zéro de l'une corresponde à l'unité de l'autre, elles formeront un ensemble, au moyen duquel toutes les opérations fondamentales du calcul graphique seront ramenées, savoir : la multiplication, à une addition ; la division, à une soustraction ; l'élevation aux puissances, à une multiplication (addition multiple) et l'extraction des racines à une division (soustraction multiple).

Les deux spirales ci-dessus étant destinées à mettre en regard deux séries linéaires qui procèdent chacune d'une loi de formation différente, on conçoit facilement qu'en exprimant ces deux séries en chiffres, on pourrait, en l'absence de toute figure, les mettre en regard dans un ordre identique, et les disposer entre elles, de manière à ce que les modifications arithmétiques opérées sur les termes de l'une, fissent reconnaître immédiatement le résultat des modifications plus compliquées, qui en sont comme la conséquence, dans les termes de l'autre. Cette

nouvelle manière de disposer les deux séries, se résout en une table à deux colonnes de chiffres dite table de logarithmes, dans laquelle les deux séries, l'une procédant par équi-différence et l'autre par équi-quotient, sont mises en regard terme à terme.

Mais, quand on représente des courbes par la succession des valeurs arithmétiques de leurs ordonnées polaires, on perd l'avantage de la continuité; car ces courbes, ainsi mises en tables, se réduisent à indiquer exactement une succession de points isolés; et, quand les solutions tombent entre les points, on est réduit à calculer par interpolation la valeur de l'ordonnée intermédiaire. Ce n'est, en conséquence, que par le rapprochement des points, c'est-à-dire, par la multiplicité des chiffres et par l'étendue des tables que l'on peut remédier à un pareil inconvénient. Aujourd'hui, grâce aux immenses développements que les tables de logarithmes ont reçus, elles l'emportent autant en étendue qu'en précision sur les deux spirales qui leur correspondent dans le calcul par le trait; ces dernières ne conservent que les avantages inhérents aux procédés graphiques: celui de la continuité, et surtout celui de la célérité et de l'extrême simplicité des moyens d'exécution.

Enfin, comme si l'on avait voulu épuiser toutes les combinaisons de l'idée première qui a donné naissance aux logarithmes, on a, depuis assez longtemps, composé un instrument intitulé: règle à calculer, qui est, en quelque sorte, une table de logarithmes mixte, et dans lequel une des séries maintient sa forme graphique, non celle de spirale, mais celle de progression superposée par équi-différence; tandis que l'autre est reproduite en regard sous sa forme purement arithmétique. Celle-ci consiste dans une succession de nombres, figurés en chiffres, et placés en regard des grandeurs linéaires de la série graphique qu'ils confrontent sans les mesurer, et avec lesquelles ils

n'ont, par conséquent, d'autre rapport que celui de position : le même qui existerait entre les deux séries purement arithmétiques.

On se rendra facilement raison des motifs qui ont suggéré cette disposition mixte, si l'on veut se rappeler que dans l'emploi des deux spirales, comme dans celui des tables de logarithmes, les opérations effectives s'exécutent toujours exclusivement sur la série par équi-différence, et que la série par quotient fournit les résultats cherchés au moyen d'une simple lecture. Il devenait donc préférable d'avoir cette dernière série sous la forme chiffrée, qui se prête le mieux à la lecture ; tandis que l'on devait conserver à la série par différence celle de ses formes qui se prête le plus aisément à l'addition et à la soustraction, c'est-à-dire la forme linéaire. Pour suivre cette idée dans toutes ses conséquences, il fallait encore doubler, par juxta-position, sur l'instrument lui-même, la série par différence à termes superposés, et rendre une de ces deux séries susceptible de glisser le long de l'autre ; les additions et soustractions se transforment par là en un simple glissement à opérer entre elles ; et quand l'opération arithmétique se trouve graphiquement terminée, l'on obtient pour ainsi dire mécaniquement, et sans aucune espèce de contention d'esprit, le point où se trouve écrit en chiffre le résultat final qui était le but de l'opération. Si on eût conservé à la série graphique la forme de spirale, un compas eût été nécessaire pour exécuter ces mêmes additions et soustractions, tandis que la discontinuité des termes de la série chiffrée eût rendu tout à fait illusoire la continuité présentée par la spirale.

Nous ne nous appesantirons pas davantage sur la construction et sur l'usage de la règle à calculer, instrument connu, dont la description a fait la matière de traités spéciaux ; et qui sera bien facilement compris par ceux qui se seront rendu familiers les procédés de calcul déve-

loppés dans le présent chapitre; mais il nous importait de signaler cette règle, comme réunissant à la fois les procédés du calcul graphique opérés par juxta-position, et les procédés de calcul purement arithmétique, soit des nombres faisant partie d'une moitié de tables de logarithmes, et placés sans aucune relation métrique avec les grandeurs linéaires correspondantes. Nous avons à faire remarquer surtout, que c'était par la réunion simultanée de ces deux procédés de calcul qu'on était arrivé, sous la forme la plus portative, à la plus grande simplicité d'exécution.

On reproche avec raison à cette règle d'être un instrument borné dans ses moyens, et auquel il faut renoncer dès que les quantités à combiner sont un peu élevées. On pourrait, sans sortir d'une dimension portative, donner de l'étendue aux échelles de cette règle; en les rapportant sur une hélice cylindrique, au lieu de les rapporter, comme on a essayé de le faire, sur une section également cylindrique, mais circulaire, et par conséquent fermée, ce qui exclut toute possibilité d'extension après le premier tour. L'hélice, au contraire, permettrait aux échelles de s'enrouler plusieurs fois autour du même cylindre, auquel il suffirait de donner pour cela une hauteur un peu plus considérable. Le problème ainsi posé, toute la question se réduit à surmonter les difficultés pratiques que pourrait présenter l'exécution matérielle de l'instrument; et l'habileté bien connue de nos constructeurs nous est une garantie suffisante que s'ils se donnaient la peine de l'entreprendre, ces difficultés ne resteraient pas longtemps insurmontables. Nous aurions ainsi des règles à calculer, exécutées au moyen des trois lignes dont l'incrustation peut glisser sur le relief : la droite, la ligne circulaire et l'hélice.

DES TRACÉS EN GÉNÉRAL.

SURFACES PLANES.

Les tracés varient nécessairement et se classent entre eux selon la nature et l'étendue des surfaces sur lesquelles ils doivent être exécutés.

On peut avoir une figure géométrique quelconque à décrire sur une surface dont les dimensions n'excèdent pas un mètre carré, qui soit plane ou du moins que l'on puisse considérer comme telle : c'est ce qui se présente lorsqu'on opère sur le papier : ce cas correspond aux dessins géométriques ordinaires, nous le désignerons sous le nom de *tracé de cabinet*.

La surface sur laquelle on opère peut prendre une étendue plus considérable et qui varie d'un mètre à mille mètres carrés, tout en conservant une forme sensiblement plane : c'est le cas des épures consacrées à l'exécution des grands travaux de serrurerie, de maçonnerie et de charpente; elles exigent soit un parquet en planches, soit un mur vertical, soit une aire construite *ad hoc*, dressée au ciment ou pavée en briques.

SURFACES IRRÉGULIÈRES.

On est forcément conduit à opérer sur des surfaces irrégulières, toutes les fois qu'il s'agit d'appliquer le trait sur une pièce quelconque de matière brute, pour lui donner une forme déterminée; ces sortes de surfaces admettent donc tous les genres de dimensions. Nous diviserons les opérations de ce genre en deux catégories : l'une correspondant à l'application matérielle du trait sur un corps de nature et de dimension quelconques, et l'autre comprenant à elle seule le tracé sur le terrain, c'est-à-dire, correspondant au cas particulier dans lequel le corps à modifier ou à mesurer constitue la superficie même du globe que nous habitons.

Les procédés, les instruments, les principes, les difficultés à surmonter, tout change et se complique en passant de l'un à l'autre de ces tracés.

Tracés de cabinet. — Nous n'avons à nous occuper ici de celui de cabinet que comme point de départ et de comparaison, et pour mieux faire ressortir les changements que les autres tracés exigent. Les instruments qu'on emploie dans celui-ci sont des compas de diverses grandeurs compris entre la forme dite à balustre, et celle du compas à verge d'un mètre de rayon. On y joint une règle de cette même dimension, une règle échelle de vingt à trente centimètres, des équerres à main, un rapporteur et un tire-ligne. Par leur moyen, le dessinateur trace en réalité les lignes et les circonférences; il exécute donc rigoureusement toutes les figures qui n'exigent que l'emploi de la droite et du cercle, et il n'a recours à l'interpolation que quand il y a lieu de tracer des courbes d'un degré supérieur.

Tracés d'épures. — Le tracé des épures en grand ne diffère, en quelque sorte, de celui de cabinet que par la portée des instruments : les compas s'étendent depuis celui d'un pied d'ouverture jusqu'au compas à verge ou à cordeau, de vingt-cinq à trente mètres de rayon; la règle, depuis le mètre et le double-mètre gradués jusqu'à la tabarre en sapin, de cinq à six mètres de long; mais, au delà de cette dimension, elle est forcément remplacée par le cordeau. Celui-ci est en outre l'instrument général du tracé sur épures; il remplace la règle, le crayon et le tire-ligne. Une fois qu'il est enduit de blanc et tendu entre deux points donnés, il suffit de le pincer et de le retirer légèrement à soi pour qu'en l'abandonnant ensuite à l'action de son élasticité il fouette sur la surface de l'aire, et y dépose la poussière blanche dont il se trouve recouvert, ce qui figure d'une manière distincte la ligne fictive qu'il déterminait auparavant.

Il faut, autant que possible, pincer le cordeau dans le sens du plan normal à la surface sur laquelle on l'emploie ; et il faut aussi que ce plan normal coïncide, autant que possible, avec la verticale. Sans cela, la trace obtenue, outre les imperfections superficielles dont elle reproduirait les accidents, affecterait encore une courbure qui serait produite par la pesanteur. En observant les précautions ci-dessus, le cordeau détermine sur toute espèce de surface l'intersection du plan normal qui passe par ses deux extrémités.

Pour tracer définitivement, au lieu de blanc, on enduit le cordeau d'une couleur voyante quelconque dont on l'imbibé au moyen d'une éponge. On se sert bien encore, dans de certaines limites, de la règle et du gros crayon ; mais le cordeau est généralement préféré par les ouvriers qui pratiquent le trait ; il comporte une célérité, et surtout une exactitude que l'on ne saurait atteindre en employant les grandes règles.

Sur l'épure, le tracé s'exécute aussi complètement que sur le papier : il admet, en conséquence, les mêmes genres de solution. Nous remarquerons toutefois que la description d'un cercle qui excède dix mètres de rayon est une opération matérielle délicate, et qui commence à exiger d'assez grandes précautions, surtout si la verge du compas est tout à la fois extensible et flexible.

Tracés sur matière brute. — L'application matérielle du trait participe à la fois du tracé de cabinet et du tracé des épures en grand, selon la nature et la dimension des surfaces à modifier. Les instruments qu'on y emploie sont tour à tour empruntés à ces deux systèmes ; mais il en est qui lui sont tout à fait particuliers.

Quand la matière est tendre et de peu de valeur, on commence à établir, dans l'endroit le plus favorable à son débit, une surface à peu près plane ; l'instrument de division adopté pour cela est ordinairement la soie. C'est

sur ce plan brut, ou préalablement rectifié, que s'exécutent les premières opérations qui tendent à préciser la forme du reste de la pièce.

La rectification d'un plan s'opère en y dressant d'abord deux lignes directrices, qui se coupent sous un angle assez ouvert, et rectifiant, de proche en proche, toutes les transversales qui s'appuient sur les directrices. Chaque droite en particulier se vérifie par la juxtaposition de l'arête d'une bonne règle, et l'on procède à cette rectification partielle, en enlevant sur chaque direction toute la matière qui s'oppose au rapprochement complet de la règle et du corps.

Mais, quand on a, par exemple, un tronc d'arbre à débiter en planches, chaque plan de division est à la fois le point de départ d'une division nouvelle et le complément de l'opération précédente. Leur exécution ne peut être laissée à l'arbitraire; car il y aurait double perte de matière à les rectifier. Il faut donc en déterminer les traces assez exactement pour que la scie ne puisse faire fausse route en les parcourant.

On y parvient en établissant la pièce à diviser dans une situation horizontale, et bornoyant deux fils à plomb convenablement placés en face de chacune de ses têtes. Par cette opération, on détermine, haut et bas, à chaque extrémité de la pièce, deux points situés en regard des deux aplombs, et que l'on pique au compas dans la direction du rayon-visuel qui permet de superposer les deux fils. On joint enfin ces points deux à deux dans le sens de la longueur du bois par un tracé au cordeau, et l'on est certain d'avoir ainsi figuré sur l'arbre les deux intersections longitudinales du plan vertical déterminé par les deux aplombs. Il suffit, par conséquent, d'assujettir la scie à parcourir ces deux lignes pour opérer exactement la division de l'arbre, selon le plan qu'on aura choisi.

Ici figure un nouvel instrument employé à déterminer

des parallèles : c'est le fil à plomb ; on y voit, pour la première fois, l'œil, ou pour mieux dire le rayon lumineux, concourir directement au tracé, et fournir une série d'ordonnées polaires qui déterminent un plan en projetant une droite sur une autre. C'est là ce qu'on appelle bornoyer.

L'œil pourrait être remplacé par un point lumineux situé de manière à projeter l'ombre d'un fil sur le fil opposé ; cette ombre, dans sa partie interceptée par l'arbre, se confondrait avec l'intersection du plan déterminé par les fils, et permettrait également de la tracer à demeure.

Ce qui distingue particulièrement l'application matérielle du trait, c'est qu'elle constitue un tracé à trois dimensions ; pour pouvoir être ramenée à des tracés d'épure et de cabinet, elle exige donc que l'on possède des procédés particuliers qui permettent d'exécuter sur la pièce tous les plans successifs au moyen desquels doit s'opérer cette transformation. Nous venons déjà d'indiquer comment on détermine et rectifie un de ces plans arbitrairement choisi.

Pour passer de ce premier plan à un second, qui constituerait la forme polyédrique réelle ou approchée du corps qu'on se propose d'obtenir, on place une première règle sur leur intersection commune préalablement tracée dans le plan primitif ; on en établit une seconde qui passe par un point extérieur du nouveau plan, de manière à ce que les deux règles embrassent et dépassent le corps entier ; et, quand on s'est assuré par la projection visuelle que la seconde est située tout entière dans le nouveau plan, l'on trace approximativement l'intersection de ce plan avec le reste du corps, en bornoyant selon les deux règles. On doit vérifier, en outre, par la présentation d'un instrument à branches mobiles, dit fausse équerre, si l'angle formé par les deux plans, tel que les règles le constituent, est bien celui qui doit exister entre

eux : on a soin , d'ailleurs , de laisser d'abord cet angle un peu gras , pour l'amener avec plus de certitude à sa dimension véritable dès qu'il devient possible de lui appliquer la fausse équerre directement.

Ici les règles remplacent les deux fils à plomb , qui ne peuvent servir qu'à diriger le tracé d'un plan vertical ; elles permettent de déterminer , par un procédé tout à fait analogue , un plan de direction quelconque. Moyennant cette opération suffisamment répétée , on ramènera à une forme polyédrique , et par conséquent à des tracés d'épure ou de cabinet , toutes les applications matérielles du trait qui se réduisent à produire des surfaces planes combinées avec des surfaces réglées ; car les plans une fois établis , il ne restera plus , pour obtenir ces espèces de surfaces , qu'à enlever sur le polyèdre la matière qui excédera chaque génératrice en particulier ; et comme celles-ci aboutissent aux courbes d'intersection que chaque plan est susceptible de produire sur la surface gauche qui lui est adjacente , ces courbes une fois tracées , les génératrices s'ensuivront nécessairement.

Si la surface n'était pas réglée , au lieu de génératrices droites on serait obligé d'appliquer , dans les mêmes circonstances , une suite de génératrices courbes qu'il serait indispensable de déterminer à l'avance , et de rapporter ensuite sur des patrons découpés ou règles courbes , connus dans l'art du trait sous le nom de *cherches*. En se rappelant que toute application du trait , pour peu qu'elle soit compliquée , suppose une épure préalable , on conçoit que c'est sur cette épure que ces recherches devront être relevées.

L'emploi de ce dernier moyen , convenablement modifié , permettra de reproduire toutes les formes géométriques possibles : il complète , par conséquent , le système de l'application matérielle du trait.

Puisque nous venons de rappeler ici la nécessité où

L'on se trouve de construire des épures préalables, au moyen desquelles on puisse se rendre compte de toutes les modifications accidentelles que comporte la forme de l'objet qu'on se propose d'exécuter, il ne sera pas hors de propos de signaler en quelques mots les divers systèmes de projection que l'on peut mettre en usage pour cela. On va voir, par les détails mêmes où nous serons obligés d'entrer, que le choix à faire entre eux est loin de se trouver une chose indifférente.

Ces systèmes peuvent se ramener à trois principaux, savoir : le système orthogonal, qui décrit par deux projections ; le système orthogonal mixte, qui décrit par une seule projection cotée ; et enfin, le système polaire, qui décrit par une seule projection ou perspective. Le premier étant généralement connu, nous entrerons dans quelques détails sur ce qui concerne les deux autres.

Depuis longtemps, le corps du génie militaire a dû renoncer à décrire, par deux projections, les divers travaux de défense dont il avait à s'occuper ; car si la projection horizontale d'un front de fortification se trouvait susceptible de conserver, en général, toute la clarté requise, il n'en était pas, à beaucoup près, de même de sa projection verticale. Celle-ci, dans la plupart des circonstances, ne présentait à l'œil qu'un assemblage de lignes à peu près parallèles à celle de terre, et tellement entremêlées, qu'il devenait impossible d'assigner immédiatement sur la figure l'origine, et par conséquent la signification de chacune d'elles. Ajoutons à cela la difficulté, plus grande encore, de lier en projection verticale les formes du terrain environnant à celles des ouvrages destinés à le défendre, et l'on concevra sans peine la nécessité où ce corps, savant s'est trouvé de décrire ses travaux en faisant exclusivement usage de leur projection horizontale.

Ce qu'on a trouvé de mieux, pour que la description ainsi restreinte ne cessât pas d'être rigoureuse, a été de

remplacer, par des chiffres ou cotes, les éléments linéaires qui devaient composer la projection verticale : ces cotes ont été soumises à une certaine loi qui permet d'en suivre aisément la filiation, de les interpréter sans trop de peine, et de les compléter au besoin. Il est résulté de cet ensemble de données un système mixte qui décrit au moyen d'une projection chiffrée, et à la formation duquel la méthode graphique et la méthode arithmétique ont, en conséquence, également concouru.

Dans ce système, un point isolé se trouve déterminé par sa projection, et par sa cote de hauteur au-dessus d'un plan horizontal fixe ; une droite, par deux de ses points cotés sur sa projection ; et un plan, par les deux cotes de sa ligne de plus grande pente, ligne unique de direction et nécessairement perpendiculaire aux génératrices horizontales que comporte la surface du plan.

Ces éléments de description, tels que nous venons de les énumérer, pourraient, à la rigueur, être considérés comme suffisants, puisqu'il ne s'agirait que d'en traduire graphiquement les parties cotées pour rétablir toutes les lignes de la projection verticale supprimée ; mais ils seraient loin de se prêter à la parfaite intelligence des dessins.

Pour y introduire l'ordre et la clarté voulue, on est convenu de ramener toute ligne cotée à la forme d'échelles ; et celles-ci ont été assujetties, non-seulement à prendre leur origine sur le même plan horizontal, mais encore à avoir pour unité de mesure sur ce plan la projection de leur partie comprise entre deux plans horizontaux fixes. Il s'en est suivi que le même chiffre indique sur chacune d'elles un point situé au même niveau, et que l'on peut obtenir immédiatement, par le moyen de cette égalité de cotes, le contour d'une section horizontale opérée dans les travaux à une hauteur quelconque.

Les échelles, comme nous l'avons déjà fait remarquer, étant des figures identiques, on a pu, sans nuire à la

clarté, se dispenser de leur donner beaucoup d'étendue, puisqu'au moyen d'une addition multiple exécutée au compas sur leur prolongement, il est toujours possible d'obtenir, soit la cote relative à un point donné, soit le point dont on connaîtrait d'avance la cote. Outre l'échelle de plus grande pente qui détermine un plan, on y trace encore, la plupart du temps, les génératrices horizontales qui correspondent aux principales subdivisions de celle-ci : ces dernières lignes, étant de niveau, se trouvent suffisamment déterminées par la cote unique qui leur sert de point de départ sur l'échelle du plan auquel elles appartiennent.

Le système mixte, dans l'état de perfection où il se trouve aujourd'hui porté, mérite toute l'attention des hommes qui s'occupent de la science du trait. Nous renverrons ceux qui voudraient l'étudier d'une manière plus approfondie au traité spécial qui a été publié par M. Noi-zet dans le *Mémorial de l'officier du génie*.

Nous rappellerons seulement ici que la description de l'espace peut à volonté s'opérer sur un plan par trois méthodes distinctes, indépendantes entre elles, toutes trois complètes dans leur genre, qui produisent toutes trois des dessins faciles à interpréter, et propres chacune à remplir d'une manière plus directe quelques-unes des principales conditions que l'art graphique est tenu de s'imposer.

S'agira-t-il de décrire pour exécuter, et par conséquent d'obtenir, dans leur véritable grandeur, tous les détails d'une machine ou d'un monument, on devra exclusivement se servir de la méthode orthogonale à deux projections.

Que si la forme du monument devait principalement dépendre de celle du terrain sur lequel on se propose de l'asseoir, il conviendrait alors d'avoir recours de préférence à la projection mixte ou cotée, vu que c'est celle qui, sous le nom de méthode des courbes horizontales,

se prête le mieux à la description circonstanciée du terrain, et que, par son moyen, on décrit et on nivelle tout à la fois. C'est aussi celle qui convient le mieux à la cubature.

Quand, enfin, l'on aura pour but principal de donner à l'esprit le sentiment des formes et celui de leurs relations, sans avoir à s'occuper de leur mise en œuvre; quand il s'agira uniquement de parler aux yeux, et de provoquer une rapide intelligence de l'objet décrit, c'est à la projection polaire à trois dimensions qu'il faudra nécessairement recourir; car ses épures, étant des perspectives, montreront les objets tels qu'ils se présenteraient naturellement à l'œil.

Cette dernière méthode, dont on trouvera un exposé succinct dans le cours de cet ouvrage, par cela seul qu'elle décrit *au moyen d'une seule projection*, appartient plus spécialement au calcul par le trait. Elle constitue une espèce d'algèbre graphique qui s'applique avec succès à la solution d'une foule de problèmes de géométrie plane. Ceux-ci se trouvent presque toujours résolus, comme par intuition, dès l'instant où l'on a pu ramener les lignes qui les concernent à constituer une épure polaire; car ces lignes accusent alors très-simplement des relations qu'il était assez difficile de prévoir *à priori*, puisque les circonstances qui les établissent dépendent de l'espace, et tiennent ainsi à la signification nouvelle qu'était susceptible de recevoir sous forme d'épure la figure plane dont on avait d'abord à s'occuper.

On trouvera, dans le chapitre des interpolations, que le système de projection polaire admet une seconde forme qui se rapporte plus directement à la géométrie de la règle, et que nous avons appelée projection dièdre; nous en donnerons quelques exemples principalement destinés à confirmer cette assertion.

Il existe encore une autre manière de concevoir la pro-

jection; elle est susceptible de s'appliquer également bien à toute figure provenant des trois premiers systèmes : c'est la détermination des ombres. Les ombres constituent , en général , la projection lumineuse d'un corps sur ses propres surfaces et sur celles des corps qui l'avoisinent ; par cette seule explication , on reconnaît que ce dernier système ne saurait être que le complément des trois autres , puisqu'il faut d'abord que le corps soit rigoureusement décrit , et par suite exactement dessiné , pour que ses surfaces diverses puissent devenir le siège d'une projection nouvelle.

La lumière projette par ordonnées parallèles , quand le point éclairant est censé à l'infini , et par ordonnées polaires , quand le point éclairant se trouve à une distance finie. Ce point est alors , lui-même , le pôle de projection. Les ombres rentrent ainsi dans les deux procédés généraux indiqués ci-dessus , et n'en diffèrent que par la nature et la diversité des surfaces sur lesquelles la projection s'opère. Il faut , de plus , y tenir compte du sens de la projection lumineuse , pour être à même de distinguer la portion qui reçoit la lumière de celle qui doit rester obscure.

Il n'y a de lignes susceptibles de porter ombre que celles qui constituent sur un même corps la séparation de la partie obscure et de la partie éclairée. Ces lignes sont des arêtes , quand elles appartiennent à deux surfaces différentes ; et des courbes de contact dites de séparation d'ombre et de lumière , quand la séparation s'opère sur une même surface. Sur la sphère , par exemple , la courbe de séparation d'ombre et de lumière est un cercle , et quand une sphère porte ombre , on ne doit tenir compte que de l'ombre produite par la surface de ce cercle.

Ce qui , dans le système de projection parallèle ou polaire , reçoit le nom de contour apparent d'un corps , s'appelle donc ici ligne de séparation d'ombre et de lumière ; il n'y a que les mots de changés.

TRACÉS SUR LE TERRAIN.

Cette espèce de tracé présente deux catégories tout à fait distinctes : dans l'une, que l'on pourrait désigner sous le nom d'astronomique, c'est le globe lui-même qu'il s'agit de mesurer ; ce sont ses méridiens et ses parallèles qu'on se propose de tracer ; et c'est par des points de repère pris dans le ciel qu'on parvient à diriger avec certitude les opérations du tracé terrestre.

On ne saurait y employer que des instruments de haute précision ; les plus remarquables d'entre eux ont été, en quelque sorte, inventés pour satisfaire aux exigences d'exactitude que comportent les opérations de ce genre. Des hommes, choisis parmi les plus éminents, ont consacré une partie de leur existence aux recherches qui s'y rapportent, et se sont immortalisés par elles ; ils ont publié des traités spéciaux, fondés sur la plus savante analyse, pour en tracer l'histoire et en constater les résultats. Cet exposé suffit pour établir que ce genre de tracé terrestre se trouve, par son importance et sa spécialité, tout à fait en dehors du cadre de l'ouvrage que nous avons entrepris.

Mais il en existe un autre dans lequel, sans prétendre à une exactitude aussi rigoureuse, on se borne, soit à mesurer et décrire une surface terrestre d'une petite étendue, soit à la modifier par des travaux industriels, pour la mettre plus en rapport avec les besoins et les habitudes des populations environnantes. La topographie cadastrale, l'ouverture des canaux, celle des routes ordinaires, l'établissement des chemins de fer, la construction des grands ponts, les dessèchements de marais, etc., figurent au nombre des plus importantes modifications de ce genre ; et, comme elles entraînent presque toutes des changements plus ou moins considérables dans la forme des portions de surface terrestre qu'elles embrassent, il s'ensuit qu'elles constituent un cas particulier de l'application ma-

térielle du trait. Mais la transition est tellement brusque, la différence de grandeur tellement marquée, que l'on ne peut presque rien emprunter à la méthode générale que nous venons d'exposer pour l'appliquer à ce cas particulier.

Ainsi, il faut renoncer à se donner un plan réel d'opérations. A défaut d'un plan réel, on lui substitue le plan fictif, qui se trouve tangent à la surface terrestre au centre de la portion sur laquelle on opère, ou du moins un plan parallèle à ce dernier. Il faut renoncer à tracer directement des cercles, quand même on aurait à sa disposition les instruments convenables : le genre de surface que cette courbe exige manque presque toujours. On ne saurait même y tracer des lignes droites d'une certaine étendue ; on ne peut que déterminer la direction du rayon lumineux qui coïncide avec elles.

Il en résulte un genre d'opérations tout à fait exceptionnel, qui a ses principes à part, et qui ne peut employer que des instruments qui soient en rapport avec ces principes. Il en résulte encore que la géométrie de la règle se trouve seule applicable dans cette circonstance, et qu'elle doit fournir presque exclusivement les solutions des divers problèmes qu'on peut avoir à résoudre directement sur le terrain : on ne sera donc pas surpris du soin que nous avons mis, dans cet ouvrage, à choisir de préférence des solutions linéaires, ou qui fussent, autant que possible, exclusivement dépendantes de cette géométrie.

Dans ce dénuement d'instruments spéciaux, le tracé terrestre emprunte ses principales ressources aux corps naturels qui se trouvent soumis à des lois géométriques ; et, plus particulièrement, il se fonde sur les propriétés suivantes :

1° Un fil à plomb est une ligne normale à la surface terrestre ; 2° dans l'étendue que l'œil peut embrasser,

deux fils à plomb sont parallèles ; 3° un rayon de lumière se meut en ligne droite , soit qu'il émane , en divergeant , d'un objet terrestre , soit qu'il se meuve parallèlement à une même direction , quand il provient d'un astre ; 4° deux points qui interceptent la vue du même objet sont donc en ligne droite avec celui-ci , deux droites qui interceptent la vue d'une troisième appartiennent toutes trois au même plan , et une droite et son ombre sont dans un même plan ; ou , ce qui est l'expression du même principe , l'œil détermine un plan en projetant une droite ; 5° la surface de l'eau tranquille est perpendiculaire au fil à plomb ; 6° le rayon visuel qui projette un point au niveau de la mer est horizontal.

Il résulte de tout ce que nous venons d'exposer que la ligne droite qui ne peut être tracée sur le terrain pourra du moins s'y trouver remplacée par la trace du plan normal qui la projette. On obtient les points de cette trace en élevant deux fils à plomb aux extrémités de la ligne donnée , et cherchant sur le terrain les points que ces fils masquent à la vue , quand l'œil est placé de manière à les superposer. Nous avons déjà donné un exemple de ce moyen d'obtenir un plan : c'est le tracé particulier des scieurs de long.

Dans la pratique , une pareille trace prend le nom d'alignement , et les fils à plomb sont presque toujours remplacés par des jalons qu'on plante verticalement en terre. C'est en plaçant , à l'œil , des jalons intermédiaires , que l'on détermine les divers points qui font partie d'un même alignement ; ce qui constitue , comme il est facile de le reconnaître , une véritable interpolation.

Quand on veut avoir le point où deux alignements se rencontrent , l'interpolation devient double : il faut faire mouvoir le jalon intermédiaire dans le sens d'un des deux alignements , jusqu'à ce qu'on trouve , en bornoyant dans

les deux sens , le point particulier qui satisfait également bien à chacune des directions données.

Les alignements se mesurent de deux manières : l'une , qui n'est qu'approchée , donne la mesure de la trace elle-même , et l'opération s'exécute en portant sur la direction de l'alignement une chaîne métrique autant de fois que la distance à mesurer le comporte ; l'autre , plus rigoureuse , a pour but de mesurer la ligne mathématique , dont l'alignement donne la projection. Il faut alors renoncer à la chaîne , et placer bout à bout des règles métriques que l'on maintient dans une position horizontale et que l'on fait aboutir à un même fil à plomb toutes les fois que l'inclinaison du terrain force à changer leur ligne de niveau. Quand on peut se contenter d'une exactitude moins rigoureuse , on place à l'œil l'instrument de mesure dans une position sensiblement horizontale ; et , à chaque fois qu'il est porté sur la ligne , on détermine , par la chute d'un grave , le point du terrain où l'opération doit recommencer , pour que chaque étalon de mesure s'aboute en projection avec le précédent.

Nous avons déjà indiqué qu'on peut , en bornoyant le même astre , obtenir la direction de deux rayons lumineux parallèles ; il s'ensuit qu'en portant des grandeurs égales sur chacune des directions d'un couple d'alignements ainsi obtenu , on établira d'autres alignements parallèles dirigés dans un sens quelconque sur le terrain.

Moyennant les opérations que nous venons de décrire , on voit qu'il sera possible d'exécuter tous les tracés qui dépendent de la géométrie de la règle , y compris même ceux qui exigeraient la détermination immédiate de deux parallèles , que cette géométrie ne peut fournir. On sera donc à même de surmonter les principales difficultés que des obstacles accidentels peuvent apporter au tracé , c'est-à-dire qu'on pourra prolonger un alignement au delà d'un obstacle qui ne permet pas de bornoyer dans sa direction ,

mesurer la portion inaccessible d'un alignement, mener un alignement au point de rencontre de deux autres, et enfin exécuter tous les tracés courbes d'interpolation tels qu'ils seront décrits dans le chapitre qui les concerne; car les solutions de tous ces problèmes sont presque toutes exclusivement linéaires.

Nous donnerons, dans ce même chapitre, quelques exemples choisis parmi les figures qui appartiennent à la géométrie de la règle, et nous y ferons connaître un des moyens que l'on peut employer, soit pour prolonger un alignement donné, soit pour mesurer sur sa direction une distance inaccessible.

Les détails dans lesquels nous venons d'entrer constituent plus particulièrement la description et la mesure de la superficie terrestre; nous dirons peu de mots de ce qui concerne l'application du trait sur le terrain, quand il s'agit de le modifier effectivement. Le principe consiste à rapporter à un même plan horizontal, au moyen de la projection mixte; tant la surface terrestre mesurée et décrite d'après la méthode que nous venons d'indiquer, que celles qui constituent les formes géométriques qu'il s'agit de lui substituer. On en déduit des ordonnées communes qui portent une double cote, savoir : celle qui correspond au terrain, et celle qui correspond au projet. La différence de ces cotes, selon le sens où la soustraction peut être effectuée, indique les points où il faut enlever de la matière et ceux où il faut en ajouter. La valeur de cette différence fait connaître en même temps la cote du solide soustrait ou celle du solide rapporté, et permet ainsi d'en obtenir la cubature.

L'exécution matérielle des plans et des surfaces a lieu sur le terrain d'après les mêmes principes qui servent à les déterminer sur un corps quelconque.

DEUXIÈME PARTIE.

QUADRATURES ET CUBATURES.

MESURE ET MODIFICATION DES SURFACES.

TOUTE section plane opère la division de l'espace en deux parties égales. Si nous admettons que les deux moitiés ainsi déterminées se détachent entre elles, cette séparation mettra en regard les deux surfaces planes qui limitent chacune des moitiés prises séparément, surfaces qui se trouvaient exactement juxta-posées avant la séparation, et formaient ainsi l'incrustation et le relief qui sont le résultat de toute section opérée dans l'espace, aussi bien quand elle est générale que lorsqu'elle n'est que partielle.

Une de ces deux surfaces planes ou plan, prise à part, forme un tout infini, puisqu'elle limite un espace infini. Pour distinguer, en conséquence, une portion de ce tout, il faudra la limiter à son tour, c'est-à-dire accomplir ou simuler les opérations qui seraient nécessaires pour la détacher de l'ensemble auquel elle appartient. Il suit de là que les limites des surfaces partielles résultent de toute solution vraie ou simulée, opérée dans la surface entière dont elles font partie. Les limites qui résultent d'une solution quelconque opérée dans une surface prennent le nom générique de lignes, et présentent aussi les deux formes relief et incrustation.

En nous bornant à considérer celles qui proviennent de l'existence simultanée d'une section et d'une solution plane, et qui ont reçu le nom de lignes droites, nous pouvons admettre : 1° l'existence d'une seule solution ; la surface

totale du plan se trouve alors divisée en deux parties égales; 2° l'existence simultanée de deux solutions : le plan se trouve alors divisé en quatre parties qui sont égales deux à deux, puisqu'elles sont exactement superposables par couples; 3° enfin, l'existence de trois solutions; et, quand la troisième ne passe pas par le point commun aux deux autres, outre les six portions également superposables par couples qui en résultent, il existe, de plus, entre les trois solutions, une portion de surface fermée, et de laquelle un point mobile qui parcourrait le plan ne pourrait sortir sans avoir à franchir une limite. Cette portion, qui a reçu le nom de triangle, augmente quand une des limites s'écarte parallèlement à elle-même; elle diminue, au contraire, quand la limite mobile se rapproche du point commun aux deux autres, et devient nulle quand, enfin, cette même limite vient à passer par ce point. Nous venons donc de reconnaître à cette portion fermée de surface plane tous les caractères d'une grandeur mathématique; il nous reste à indiquer les procédés par lesquels se mesure cette nouvelle espèce de grandeur. Nous devons écarter, momentanément, le procédé de superposition soustractive, par cela seul que le reste d'une soustraction triangulaire n'est pas une portion de surface immédiatement comparable aux deux autres termes de la soustraction. La superposition, quoique ce soit le seul moyen qui puisse conduire à l'évidence, quand il s'agit de constater l'égalité de deux grandeurs matérielles, ne pourrait pas même, dans la plupart des cas, nous faire reconnaître directement le rapport d'égalité entre deux surfaces triangulaires quelconques; elle n'est praticable, en effet, que pour deux triangles qui sont dans le rapport de relief et d'inscrutation; ce sont les seuls qui soient susceptibles d'être directement superposés.

Deux triangles situés sur un même plan comportent une

superposition indirecte ou directe, selon qu'ils se trouvent égaux ou symétriques; mais le moyen par lequel on parvient à les placer en superposition directe ne peut plus être mis en usage dès qu'il s'agit d'une autre surface que le plan.

Soient deux triangles symétriques, ayant leurs trois côtés respectivement égaux, mais disposés entre eux dans l'ordre où ils se présentent, quand l'un des triangles est, par réflexion, l'image de l'autre; si nous nous contentions de faire glisser leur plan commun, pour les amener à superposition avec le même relief, jamais la chose ne serait possible, parce que le côté homologue, qui occupe dans l'un la droite de l'hypoténuse, dans l'autre, au contraire, occupe la gauche; mais, si nous supposons que la surface plane sur laquelle ils sont tous deux tracés se plie autour d'une certaine ligne comme charnière, de par suite de ce mouvement, les deux portions de plan pourront venir s'appliquer en regard; et ce changement qui place les deux triangles dans la position respective relief et d'incrustation, rendra leur superposition immédiatement possible; un des triangles, en se retournant, ayant échangé, bout par bout, ses relations de droite et de gauche.

Si, au lieu de deux triangles plans symétriques, nous avons à démontrer dans les mêmes circonstances l'égalité de deux triangles sphériques, comme la superposition des surfaces sphériques ne peut avoir lieu par duplication, vu que jamais le relief ne saurait s'y convertir en incrustation, on voit que la superposition sphérique est alors absolument impossible, soit directement, soit indirectement; mais on arrive à la démonstration d'égalité, en prouvant que la surface de chacun des triangles à comparer est le reste d'une soustraction, dont les termes sont eux-mêmes indirectement superposables. Le raisonnement prend alors cette forme logique: si de deux grandeurs égales par superposition on retranche terme

à terme une suite de grandeurs égales et superposables deux à deux, les restes, quoique non superposables, seront nécessairement égaux. Ainsi les calottes sphériques, déterminées par le cercle circonscrit à chaque triangle sphérique symétrique, se trouvent en effet égales et superposables; et, d'un autre côté, les trois lunules qu'il faut en soustraire, pour les ramener aux triangles proposés, sont pareillement égales et superposables deux à deux. Nous verrons plus tard cette forme de raisonnement servir également à démontrer l'égalité des angles trièdres symétriques.

Quand deux surfaces planes sont entre elles dans le cas d'égalité non superposable, on dit qu'elles sont *équivalentes*. La géométrie élémentaire fournit tous les moyens nécessaires pour transformer une surface donnée en ses équivalentes; ainsi, par cela seul qu'un triangle est la moitié superposable d'un parallélogramme, et qu'on peut démontrer, par superposition soustractive, l'équivalence de tous les parallélogrammes ayant même base, et compris entre cette base et une ligne qui lui est parallèle, il en résulte que tous les triangles qui ont une base commune, et leur sommet situé sur une parallèle à cette base sont équivalents entre eux. Les relations d'équivalence se prêtant à une démonstration rigoureuse et à une grande simplicité de transformation, c'est de cette sorte d'égalité qu'on a déduit les lois générales de la mesure des surfaces planes.

Il existe une forme particulière de surface fermée, le parallélogramme rectangle, qui, quand on la modifie par l'écartement parallèle d'une de ses limites, reste partiellement superposable, et par conséquent comparable à elle-même, tant dans sa portion primitive que dans l'augmentation produite. Cette surface se trouvant ainsi mesurable à l'instar de la ligne droite, ses modifications peuvent être exprimées linéairement par les modifications

identiques de celles de ses lignes qui les partagent et les reproduisent ; on voit , dès lors , que pour rendre deux surfaces quelconques comparables entre elles par superposition , il suffit de les transformer géométriquement chacune en un rectangle de surface équivalente et de base commune ; car une fois la transformation opérée , la comparaison linéaire des hauteurs de ces rectangles équivaldra à la comparaison immédiate des deux surfaces primitives.

On choisit pour base constante de ces rectangles transformés l'unité de mesure linéaire , qui sert à évaluer leurs côtés respectifs ; de telle sorte que , dans le nombre qui sert à exprimer les dimensions en hauteurs , on trouve en même temps celui des carrés superficiels que le rectangle comporte , et dont il peut être censé formé , par additions successives. Chacun de ces carrés , qui ont eux-mêmes pour côté l'unité linéaire , constitue , par conséquent , l'unité superficielle à laquelle les surfaces primitives se trouvent rapportées.

D'après ces explications , il doit être bien entendu que , dans tout ce qui va suivre , évaluer ou mesurer une surface sera simplement pour nous trouver la hauteur du rectangle qui lui est équivalent , et qui a l'unité linéaire pour base ; et pourvu que nous ne changions rien à l'unité adoptée , une fois cette hauteur trouvée , on conçoit que nous serons libres d'opérer à volonté sur elle , soit par addition , soit par soustraction , et que les modifications linéaires que nous lui ferons ainsi subir représenteront nécessairement des modifications identiques dans la surface primitive.

MESURES GRAPHIQUES DES SURFACES.

Lemme. Un rectangle quelconque a pour mesure linéaire sa hauteur répétée autant de fois que sa base contient d'unités linéaires, soit le produit de la multiplication de sa base par sa hauteur. On n'aura donc qu'à exécuter graphiquement cette multiplication pour obtenir la dimension correspondante cherchée. Elle sera nécessairement commune à tous les parallélogrammes équivalents, quand ils seront rapportés à la même unité de mesure.

Un triangle quelconque étant équivalent à un triangle rectangle de même base et de même hauteur, et celui-ci étant la moitié superposable du rectangle déterminé par les mêmes dimensions, il s'ensuit qu'on obtient la mesure linéaire d'un triangle quelconque en prenant la moitié du produit de la multiplication graphique de sa base par sa hauteur, soit le produit de la base par la demi-hauteur.

La méthode générale d'évaluation graphique de la surface d'un triangle consistera donc à prendre pour origine, Pl. II, *fig.* 5, un des sommets adjacents à la base bc , et à exécuter, entre les deux côtés qui s'y rencontrent pris pour conjuguées, la multiplication susmentionnée. La base s'y trouvant toute portée, il ne restera plus qu'à y disposer convenablement la demi-hauteur de c en e et l'unité linéaire de c en d , et à procéder au tracé qui opère la multiplication entre les deux facteurs. Le produit eg donnera, en mesure linéaire, la superficie cherchée, soit, comme nous l'avons déjà remarqué, la hauteur du rectangle équivalent, ayant l'unité linéaire pour base. On parviendra plus simplement encore au même résultat en portant sur les mêmes conjuguées d'un côté deux fois l'unité, et de l'autre deux fois la demi-hauteur du triangle, c'est-à-dire, la hauteur totale elle-même : cette seconde manière d'obtenir le sens de projection dispense de prendre la moitié de la hauteur; opération toujours assez longue, soit

qu'on l'exécute par tâtonnement, soit qu'on y applique le tracé rigoureux.

Quoique cette construction ne soit pas très-compiquée, on va voir qu'il est possible d'arriver encore plus simplement au même résultat; ce qui ne laisse pas que d'être de quelque importance, quand il s'agit d'une opération qui, appliquée, par exemple, au métrage des terrassements de route, serait de nature à se renouveler très-fréquemment.

Il existe deux sortes de triangles dont la surface se trouve donnée par la longueur même d'une de leurs dimensions constitutives; savoir: ceux dont un des côtés est égal en longueur à deux unités linéaires, et ceux dont une des trois hauteurs présente cette même dimension. Les premiers ont pour mesure la hauteur corrélative au côté qui égale deux, et les seconds le côté qui correspond à la hauteur qui est double de l'unité. En transformant donc le triangle proposé en un autre équivalent en surface, et qui soit dans une de ces deux catégories, on obtiendra dans les lignes du second la dimension qui mesure la surface du premier. Deux nouvelles solutions résultent de cette remarque.

Deuxième solution. Soit donné le triangle abc , Pl. II, fig. 6. Si, sur le côté ab , nous portons, à partir du point b , une grandeur bb' égale à deux unités; et si, par a , nous menons une parallèle à $b'c$, jusqu'à sa rencontre c' avec la direction bc , le parallélisme des deux lignes établira l'équivalence des triangles $ac'c$ et $ac'b'$; soustrayant la partie commune aoc' , on en déduira l'égalité de aob' et $cc'o$; et, enfin, celle des triangles abc et $bb'c'$, par l'addition du quadrilatère $ocb'b$. Mais le dernier triangle $bb'c'$, à cause de $bb' = 2$, a pour expression de sa surface la hauteur $c'h$ au-dessus de ab ; cette même dimension sera donc, aussi, la mesure de son équivalent abc .

Dans cette construction, on se dispensera de mener les

lignes $b'c$ et $b'c'$, et même la hauteur $c'h$; celle-ci peut être prise avec un double-décimètre, instrument qui sert à mener des perpendiculaires assez exactement pour que, sans les tracer, on puisse en évaluer directement la grandeur sur l'échelle que portent ses tranches. Ce moyen est, comme on voit, déjà plus expéditif que le précédent.

Troisième solution. Soit donné le même triangle abc ; Pl. II, *fig.* 7. Du sommet b , pris pour centre, on tracera une circonférence avec une grandeur de rayon br égale à deux; du point a , on mènera à cette circonférence une tangente que l'on prolongera jusqu'à sa rencontre c' avec une ligne auxiliaire cc' , menée par le sommet c , parallèlement à la base ab . Le point c' pourra, dès lors, être considéré comme appartenant à un nouveau triangle abc' , équivalent au triangle proposé, puisqu'ils ont une base commune et leurs sommets placés sur une parallèle à cette base. Ce nouveau triangle, ayant par construction la hauteur de son sommet b au-dessus de ac' égale à deux unités, a pour expression de sa surface la mesure linéaire de ac' , mesure qui lui sera par conséquent commune avec le triangle donné.

En l'état, ce troisième procédé pourrait être considéré comme le plus compliqué des trois, puisqu'il exige l'emploi successif de l'équerre, du compas et de la règle; mais il sera facile dans la pratique de le simplifier. Et d'abord, on se dispensera d'avoir recours au compas (nous verrons plus tard qu'on peut également se passer de l'équerre). en employant pour tracer la ligne ac' un double-décimètre gradué dont la largeur soit exactement égale à deux unités, c'est-à-dire égale à 0^m.02, si, par exemple, l'échelle adoptée était de 0^m.01 pour mètre. Il suffira, pour remplir la condition de tangence, indépendamment du tracé circulaire, *fig.* 8, d'appliquer cet instrument sur la base ab , de manière à la recouvrir en totalité; et d'assujettir ses deux tranches à passer l'une par le point b , et

l'autre par le point *a*. On trouvera dans cette nouvelle disposition un autre avantage; c'est que le *décimètre étant ainsi placé, on pourra évaluer immédiatement, sur l'une ou l'autre de ses échelles, le nombre qui correspond à la longueur de *ac'*, et par conséquent à la surface du triangle proposé.

Ce dernier moyen reprend ainsi l'avantage; et son extrême simplicité doit le faire préférer à toute autre méthode d'évaluation, surtout quand on aura un grand nombre de triangles à mesurer à la même échelle, ce qui se présente assez fréquemment dans la pratique de l'art de larpenteur et de l'ingénieur.

Il y a plus, ce procédé ne se borne pas aux triangles; on peut également encore l'étendre aux quadrilatères. Car, en plaçant le double-décimètre de manière à ce que ses deux tranches passent par les extrémités d'une des diagonales *ac* du quadrilatère *abcd*, Pl. II, *fig.* 7 et 9, il mesurera, entre les deux parallèles menées à cette diagonale par les sommets *b* et *d*, la surface totalisée des deux triangles *abc* et *adc*, qui forment l'ensemble de ce quadrilatère.

Quand les triangles à mesurer seront d'une dimension trop grande pour permettre l'emploi de ce moyen de mensuration, ce qui aura lieu toutes les fois que le plus petit côté ou la plus petite hauteur excédera trois fois la largeur de l'instrument, il conviendra de les mesurer par parties. Il suffit, pour cela, de diviser un des côtés, pris pour base, en un certain nombre d'éléments qui puissent satisfaire à la mensuration. Le triangle proposé étant la somme des triangles partiels qui proviennent de ces subdivisions, on évaluera leur total avec assez de simplicité, si on a soin de porter $n - 1$ divisions égales sur cette base, ce qui peut toujours avoir lieu sans tâtonnement (n étant le nombre total des parties). On réduira, par ce moyen, la mensuration effective à celle des deux seuls triangles élémentaires dont les bases diffèrent de longueur.

Dans le cas où le triangle proposé aurait une de ses hauteurs de dimension mesurable, on devrait le considérer comme un quadrilatère dont cette hauteur serait la diagonale, et le mesurer en conséquence.

Quand le triangle manquera, au contraire, aux conditions de mensuration par la petitesse de ses côtés, on répétera sa plus grande ligne, par additions successives, un nombre de fois suffisant pour que le total puisse atteindre aux deux échelles de l'instrument; et l'on diminuera la surface trouvée proportionnellement à l'augmentation qu'aura dû recevoir la base, sur laquelle on aura opéré, pour devenir mesurable.

Si l'on n'avait, enfin, qu'un double-décimètre dont la largeur p ne fût pas égale à deux unités de l'échelle adoptée, il faudrait, pour s'en servir, modifier la base ab suivant le rapport de 2 à p . Dans cette supposition, on porterait sur ac , *fig. 7*, les dimensions $p = ap$ et $2 = ap'$; et la parallèle $p'b'$ à la direction $p'b$, opérerait la division de la base dans le rapport susmentionné. Regardant alors la partie ab' comme la vraie base du triangle, on obtiendrait la surface cherchée en y appliquant l'instrument défectueux.

D'après les considérations précédentes, le même double décimètre ne peut servir, comme on voit, avec avantage à la mesure des triangles, que dans les seuls cas où l'échelle du dessin se trouverait exactement dans un rapport sous-double avec la largeur de l'instrument; ce qui semblerait exiger presque autant de doubles-décimètres qu'il peut se présenter d'échelles différentes; mais il est possible de donner beaucoup plus d'extension aux services qu'un même instrument peut rendre, en le faisant construire en matières transparentes (*). On peut, dans ce but,

(*) La transparence de l'instrument, en permettant d'appliquer sur les côtés des petits triangles une échelle transversale sous-multiple, dispense d'augmenter leur dimension.

l'établir en corne moulée, ou, mieux encore, en écaille blonde.

Celui que nous avons fait construire pour notre usage (*) présente une petite règle à bords tranchants, et à section transversale de forme ménisque, *fig. 9*, conforme en cela au double-décimètre en ivoire qu'on trouve à Paris chez divers fabricants. Sa largeur est exactement de $0^m.04$; il porte, sur sa face plate, une suite de lignes parallèles distantes entre elles de $0^m.001$, d'où résulte une échelle transversale qui occupe toute la longueur de l'instrument, et au moyen de laquelle il devient possible, en recouvrant la base d'un triangle quelconque, de juger, par transparence, de la distance qui existe entre les deux lignes qui embrassent cette base; et, par conséquent, de choisir ces deux lignes, selon les changements d'échelle auxquels il convient d'avoir égard. On voit; d'après les dimensions adoptées; que la largeur entière correspond à l'échelle de $0^m.02$ pour mètre; les deux tiers, à celle de $0^m.015$; la moitié à celle de $0^m.01$, et le reste proportionnellement. Il est bien entendu qu'on doit, avec un pareil instrument, lire les divisions de la tranche d'après l'unité qui décide de l'échelle transversale. Aussi, quand cette unité ne sera pas une partie aliquote facile à calculer, conviendra-t-il de construire à part, sur le dessin, une échelle de longueur auxiliaire, pour lui comparer par rapprochement la longueur absolue de mensuration que l'instrument fournira sur sa tranche; mais ceci n'aura lieu que dans des cas fort rares, puisque les échelles en usage sont presque toujours des parties aliquotes simples du mètre.

Un double-décimètre, tel que nous venons de le décrire, présente encore un avantage qui ne laisse pas que d'être important, et sur lequel nous devons particulièrement insister; on peut, par son moyen, exécuter d'un seul trait

(*) Par M. Tachet, rue Saint-Honoré, n° 274.

le tracé qui consiste à mener, par un point, une parallèle à une direction qui serait déjà déterminée, soit par une ligne directrice, soit par l'existence de deux de ses points, construction qui, d'ordinaire, s'exécute en faisant glisser une équerre le long d'une règle. Pour employer notre instrument à cet usage, on le placera de manière à ce qu'une de ses tranches passant par le point donné, la ligne directrice se trouve entièrement recouverte par lui; alors, sans quitter le point qui sert de centre de rotation, on amènera la règle à une position telle, que la ligne recouverte corresponde exactement avec une des subdivisions de l'échelle transversale, ou du moins à ce qu'elle s'en trouve également distante sur toute sa longueur; ce que l'œil apprécie avec facilité, vu le rapprochement des lignes auxquelles on la rapporte. Ces conditions remplies, on est assuré que la tranche passant par le point de rotation détermine la parallèle cherchée. S'il existait trop de distance entre le point donné et la ligne directrice, on tracerait d'abord une parallèle auxiliaire, à la plus grande distance que l'on pourrait atteindre; et l'on parviendrait ainsi, en une ou deux fois, à la parallèle demandée; mais il conviendrait d'exécuter autrement le tracé, s'il fallait répéter plus souvent cette opération préliminaire, et voici comment on devrait alors s'y prendre :

En se reportant à la *fig. 8*, on peut remarquer que la ligne *ba* est la sécante de l'angle *abo*, et que *ao* en est la tangente; donc, toutes les fois que l'instrument interceptera, sur cette première droite prolongée, une portion égale à *ab*, sa tranche, formant avec cette ligne un angle dont la sécante n'aura pas changé, restera constamment parallèle à elle-même. De là résultent, et un nouveau moyen de mener une parallèle, et une modification applicable au procédé de mensuration des triangles à grandes dimensions. Un exemple va nous mieux faire comprendre.

Dans le triangle abc , *fig.* 8, après avoir préalablement prolongé la base ab , on placera l'instrument comme à l'ordinaire, de manière à embrasser exactement cette base. Cela fait, on évaluera avec le plus de précision possible (soit au dixième de millimètre), le chiffre des deux cotes qui, sur chaque échelle, correspondent aux points a et b . Dès lors, en faisant glisser l'instrument, de manière à conserver en contact avec la ligne les deux points qui leur étaient communs au départ, quand on arrivera à une position telle que l'une des tranches passe au point c , la portion d'échelle $a'c$ qui sera comprise entre le sommet et le prolongement de la ligne de base, étant égale à ac , comme parallèles comprises entre parallèles, mesurera la surface du triangle abc .

On peut encore, Pl. II, *fig.* 6, au moyen du double-décimètre placé à angle droit sur la ligne bc , chercher quel est le point de la base ab qui s'en trouve exactement éloigné de deux unités; et, ce point b'' trouvé, mener par a une parallèle à la direction $b''c$: on obtiendrait ainsi sur bc le sommet c'' d'un nouveau triangle équivalent au proposé, et qui aurait pour mesure superficielle son côté bc'' , celui qui, par construction, constitue la base correspondante à la hauteur qui égale deux.

Il est facile de reconnaître, dans les deux procédés qui se rapportent à la *fig.* 6, un cas particulier de la réduction des quadrilatères en triangles équivalents; car tout triangle peut, au besoin, être considéré comme un quadrilatère tel que $ab'bc$, et dans lequel l'angle b' aurait atteint 180° . Cette supposition a l'avantage de laisser l'emplacement du sommet effacé tout à fait indéterminé; et selon que dans cette figure on le placera en b' ou en b'' , la suppression de l'angle a qui précède immédiatement l'angle variable, fera disparaître du contour quaternaire une partie déterminée de la base ab , et permettra par conséquent de ramener le triangle proposé à l'une des

deux formes qui portent avec elles leur propre ligne de mensuration.

Cette manière d'envisager les deux solutions de la *fig. 6* a l'avantage de ramener à un seul et même procédé la mesure des surfaces polygonales. Le raisonnement consiste, comme on voit, à pousser la réduction des côtés au delà du premier triangle obtenu ; et, pour cela, à considérer celui-ci comme un quadrilatère tellement disposé que sa réduction conduise à un second triangle qui puisse fournir immédiatement sa propre ligne de mensuration ; ce qu'il est toujours possible d'exécuter, en profitant de l'indétermination du sommet qui doit compléter le quadrilatère particulier que l'on se donne ainsi à réduire.

Cette identité de procédé est d'autant plus importante à signaler que, ramenant à un problème élémentaire unique les constructions diverses qu'exige l'évaluation superficielle des polygones d'un nombre quelconque de côtés, elle tend tout à la fois à populariser la méthode graphique et à faire éviter toute espèce de méprise dans l'enchaînement des tracés qu'elle comporte ; aussi, c'est à ce procédé particulier de réduction qu'il conviendra d'avoir recours de préférence, quand on sera réduit à faire usage d'un double-décimètre usuel dont la largeur ne sera pas en rapport avec l'échelle des dessins.

Envisagées sous un autre point de vue, *toutes les solutions précédentes* se réduisent à trouver le quatrième terme de deux rapports inverses, dont trois termes sont donnés : le rapport connu se compose de la base et de la hauteur du triangle primitif, et le troisième terme est le double de l'unité de mesure à laquelle on veut rapporter la surface. Une question du même genre se présente en statique lorsque, la grandeur d'un bras de levier et celle de la force correspondante étant données, on demande, connaissant le second bras, la valeur de la force qui ferait équilibre à la première. Cette espèce de problème est

susceptible d'une formule graphique qui l'embrasse dans toute sa généralité ; car, si l'on place séparément sur deux conjuguées, à partir de l'origine, les deux termes du rapport connu, soit la base et la demi-hauteur du triangle à mesurer, et que l'on mène l'ordonnée qui les projette entre eux, en prenant cette ordonnée pour tangente et les conjuguées pour asymptotes, on déterminera une hyperbole, dont toutes les autres tangentes détacheront des segments asymptotiques homologues, qui seront, deux par deux, en rapport inverse avec les deux premiers. L'un quelconque de ces segments étant donc pris pour unité, l'autre mesurera la surface du triangle proposé ; ce qui revient à dire que chacun des rectangles construits au moyen des segments qui proviennent d'une même tangente sera équivalent au carré que forment les segments égaux qui proviennent de la tangente au sommet de la courbe.

Or, on sait que pour obtenir dans cette figure une tangente nouvelle au moyen de la première, il suffit de mener par les deux points de départ de ces lignes sur l'une des asymptotes un couple de parallèles qui aille aboutir aux deux points d'arrivée sur l'autre ; ce qui se réduit à mener, par un point, une parallèle à une direction donnée ; et, comme on a le moyen d'exécuter ce dernier tracé en faisant glisser un double-décimètre quelconque le long d'une ligne directrice, de manière à ce que la portion qu'il y intercepte reste constante de grandeur, il s'ensuit qu'on pourra toujours, à l'aide d'un de ces instruments, évaluer approximativement une surface polygonale quelconque. Mais on devra donner la préférence à ceux qui sont établis en matières transparentes, comme fournissant tout à la fois les procédés d'exécution pratique les plus exacts et les plus simples.

Nous nous sommes borné, comme on voit, dans ce qui précède, à indiquer les divers moyens d'obtenir la surface d'un triangle et d'un quadrilatère ; et nous l'avons

fait avec d'autant plus de raison, que c'est, en définitive, à ces dernières évaluations qu'on devra ramener les autres surfaces polygonales en leur appliquant, un nombre de fois suffisant, la construction géométrique, au moyen de laquelle on réduit un polygone donné en un autre équivalent en surface et d'un nombre de côtés moindre. Et comme il se trouve que pour opérer cette réduction il faut simplement, par un des angles, mener une parallèle à la diagonale qui lui est immédiatement adjacente, et répéter cette même opération autant de fois qu'il y a de côtés à réduire, il en résulte aussi que notre double-décimètre s'applique également bien à cette partie préliminaire du problème, et qu'après avoir été employé comme règle à parallèles à la réduction triangulaire des polygones, il finit par servir, comme échelle, à mesurer les triangles eux-mêmes; complétant à lui seul toute l'opération, comme nous l'avons déjà annoncé ci-dessus.

Pour résumer en peu de mots les services que ce petit instrument est dans le cas de rendre, nous rappellerons que c'est à la fois : 1° une équerre; 2° une règle simple; 3° une règle à parallèles; 4° un étalon décimal et une échelle linéaire; 5° une échelle de mesure superficielle. Nous ajouterons enfin que rien ne serait si facile que d'en faire une échelle circulaire ou rapporteur, soit en y plaçant les cordes de 0 à 60°, soit en y opérant la sous-division d'une des tranches selon l'échelle des sécantes.

Notre tâche serait entièrement terminée, si en décrivant un instrument de ce genre nous n'avions cherché qu'à en faire ressortir les propriétés diverses; on comprend qu'il nous reste à faire connaître, en peu de mots, l'emploi auquel nous l'avons plus particulièrement destiné.

L'administration des ponts et chaussées voulant réduire, autant que possible, les longs calculs de déblai et de remblai qui servent à l'estimation des projets de routes neuves, a fait publier des tables qui donnent une partie

des résultats numériques que l'exécution de ces calculs exige pour être complète.

La composition de ces tables repose sur quatre données principales ; on y suppose : 1° que la ligne du projet est remplacée , entre les arêtes-accotements , par une horizontale unique , moyenne de position entre les remblais de l'accotement et les déblais de l'encaissement ; 2° que le profil du terrain , dans toute l'étendue qu'embrasse le projet , se trouve à son tour ramené à deux lignes droites moyennes , ayant leur point d'intersection commun sur l'axe même de la route ; 3° que l'inclinaison des talus du projet reste constante sur toute la longueur du parcours ; 4° que la déclivité du terrain et que les hauteurs des déblais et remblais n'excéderont pas les limites où s'arrêtent les calculs tabulaires.

Tout en reconnaissant l'avantage incontestable qui résulterait de l'emploi d'un pareil système de tables , nous ferons remarquer que leur usage , pour devenir général , implique la nécessité de calculer autant de séries complètes différentes qu'il peut y avoir de profils divers adoptés ; qu'à même largeur , elles ne sont pas applicables aux profils en revers , et à ceux qui comportent des ouvrages de soutènement ; que dans les localités fortement accidentées , deux lignes droites dont le point de rencontre est invariable se prêteront difficilement à représenter avec exactitude les profils abrupts des parties rocheuses ; et , enfin , que ces tables feront nécessairement défaut partout où la déclivité du terrain et les hauteurs totales des mouvements de terres excéderont les prévisions du calculateur , comme aussi partout où les talus du projet devront être accidentellement modifiés.

Dans une foule de circonstances qu'il est facile de prévoir , on se trouvera donc forcé de reprendre la longue série de calculs qu'elles étaient destinées à faire éviter. C'est pour remédier autant que possible à cet inconvé-

nient, que nous avons cherché si les simplifications que la méthode graphique comporte, n'étaient pas de nature à suppléer à l'insuffisance des tables, partout où celles-ci pourraient faire défaut. Le système que nous venons de développer est celui auquel nous avons été conduit par nos recherches à ce sujet.

Et d'abord, nous pourrions remarquer, à son avantage, qu'il n'admet pas d'exceptions et s'applique à tous les genres de profils comme à toutes les variations accidentelles qu'ils sont dans le cas de subir. Pour employer la mensuration graphique au calcul des terrassements, nous n'aurons qu'à admettre à peu près les mêmes suppositions que comporte l'emploi des tables.

Ainsi nous adopterons également la substitution d'une ligne droite moyenne en remplacement des lignes accidentées du terrain, comme aussi des lignes brisées du projet; mais, pour nous, cette dernière moyenne comportera toutes les inclinaisons de revers, et elle se prolongera jusqu'aux talus de déblai quand il en existera, laissant ainsi les fossés en dessous d'elle, sauf à les évaluer à part.

De plus, comme les surfaces des profils en travers qu'on a à mesurer sont toujours comprises dans des périmètres dont les lignes appartiennent partie au projet et partie au terrain, pour les ramener à des triangles équivalents; ce qui est l'opération préliminaire sur laquelle est également basée notre méthode, il était tout naturel, après avoir rectifié celles des lignes du projet qui présentaient des brisures, de moyenniser à son tour la ligne du terrain toutes les fois qu'elle se trouvait accidentée; c'est surtout dans cette transformation que le procédé graphique l'emporte en célérité sur les moyens qui dépendent du calcul, et en exactitude sur ceux qui ne seraient basés que sur la justesse du coup d'œil. Pour le rendre applicable à la circonstance, il suffit, dans chaque surface distincte

de déblai et de remblai, d'opérer la réduction du contour polygonal exclusivement sur la partie qui y représente le terrain, et de s'arrêter quand cette partie se trouve ramenée à une ligne droite, les lignes du projet restant ainsi parfaitement invariables.

Cette opération terminée sur tous les profils qui peuvent l'exiger, on voit qu'il ne s'agit plus que d'évaluer des triangles ou des quadrilatères, ce dernier cas se présentant toutes les fois que la route se trouve tout entière en déblai ou en remblai; et que nos figures se trouvent ramenées à la forme de facile mensuration sans avoir rien laissé d'arbitraire dans le choix des lignes, puisque rien ne s'oppose à ce que les profils primitifs soient levés sur le terrain avec toute l'exactitude désirable, et que leur transformation s'opère dans le cabinet par un procédé géométrique rigoureux.

Quand, en plaçant sur chaque figure réduite le double décimètre décrit ci-dessus, on aura déterminé la ligne qui mesure sa surface, il sera bien de l'y tracer à demeure. Pour la distinguer des autres, il suffira de la tracer double; on écrira son chiffre au centre de l'intervalle des deux traits, Pl. II, *fig. 8*; et l'on pourra même colorer cet intervalle de la teinte affectée à la nature de terrassement (déblai ou remblai) à laquelle appartient la surface correspondante. Si c'est un déblai, on y ajoutera la valeur des fossés négligés, obtenue linéairement une fois pour toutes. Par ce moyen, le métrage fera corps avec les dessins; et ceux-ci fourniront désormais une indication nouvelle: celle des surfaces représentées par des lignes spéciales, portant des cotes de facile vérification.

SURFACES A PÉRIMÈTRE COURBE.

La mesure graphique des surfaces serait incomplète, si, après avoir donné le moyen de déterminer les superficies qui sont comprises dans un contour composé de

lignes droites, nous ne donnions pas un procédé applicable à celles qui sont renfermées dans un périmètre, soit mixtiligne, soit entièrement courbe.

Nous emploierons pour cette évaluation nécessairement approximative, une marche semblable à celle que nous venons de suivre pour les polygones à côtés rectilignes : nous chercherons encore, parmi toutes les lignes qu'on peut mener dans la figure donnée, celles qui doivent nous fournir immédiatement, par le chiffre de leur longueur, celui d'une partie distincte de la surface à mesurer. Un exemple va nous servir à développer le principe sur lequel repose cette méthode.

Supposons qu'on ait à évaluer la section d'une rivière, pour en connaître la dépense d'eau : le moyen qu'on emploie ordinairement consiste à prendre une suite de sondes dans une direction normale au courant ; et, une fois les sondes et leurs distances mesurées, à évaluer à part chacun des trapèzes de la surface liquide compris entre deux sondes consécutives ; ce qui revient, en considérant ces trapèzes comme rectilignes, à moyenner les deux sondes extrêmes, et à multiplier le chiffre moyen par la distance horizontale comprise entre les sondes.

Mais, au lieu de prendre les deux sondes extrêmes et de les moyenner, il serait bien plus simple de mesurer immédiatement la sonde moyenne elle-même, et de la multiplier par la largeur ; et si, de plus, cette largeur était constante et égale, par exemple, à 1, à 5, à 10, à 20, à 30, etc. unités, la surface de chaque trapèze se trouverait une fonction connue du chiffre de sa hauteur moyenne, et par conséquent s'obtiendrait, soit par un simple mouvement de virgule, soit par une modification facile à lui faire subir. Notre méthode consiste donc, comme on voit, à ne pas prendre les sondes au hasard, et à les disposer de manière à satisfaire aux conditions ci-dessus énoncées. En prenant la première sonde à 5 mètres du bord,

et toutes les autres à 10 mètres de celle-ci, il est facile de reconnaître que l'on a pris les moyennes hauteurs d'une suite de trapèzes ayant tous une largeur constante de 10 mètres, et qu'il suffit, par conséquent, de placer toutes les sondes bout à bout, et de multiplier leur chiffre total par 10, c'est-à-dire, de reculer la virgule d'un rang pour avoir la section cherchée. Il reste presque toujours, sur le bord opposé à celui où l'on commence l'opération, un dernier triangle dont les dimensions en longueur sont moindres que la commune, et qu'il faut nécessairement évaluer à part, pour compléter la section cherchée.

En général, pour évaluer la surface d'un quadrilatère mixtiligne formé par l'axe des abscisses, un arc de courbe quelconque, et les deux ordonnées rectangulaires qui aboutissent aux deux extrémités de celui-ci, on peut, comme nous venons de le faire, se contenter, si la courbure n'est pas trop sensible, de considérer la surface comme un trapèze; et dès lors la hauteur réduite qui correspond au rectangle équivalent est donnée arithmétiquement par la demi-somme des ordonnées extrêmes, et graphiquement par l'ordonnée moyenne; mais, quand la courbure sera trop prononcée pour être négligée; et surtout, quand on ne voudra pas se contenter d'une pareille approximation, toujours sensiblement plus forte, ou plus faible que la véritable grandeur, il sera possible d'obtenir une hauteur réduite plus exacte que les deux précédentes en prenant *le sixième de la somme des deux ordonnées extrêmes augmentées de quatre fois l'ordonnée intermédiaire*; ce qui revient à supposer que l'on remplace le quadrilatère mixtiligne primitif par deux trapèzes rectilignes comprenant entre eux un rectangle dont la hauteur égalerait l'ordonnée intermédiaire. Car, en supposant une largeur égale aux trois surfaces, on arrive à la réduite mentionnée ci-dessus par les considérations suivantes :

Soient a et b les ordonnées extrêmes, c l'intermé-

diaire et f la flèche située sur son prolongement, d'où $\frac{a+b}{2} = c \pm f$. Le signe dépendra du sens de la courbure.

On trouve, en évaluant séparément les hauteurs moyennes des trois quadrilatères, qu'elles sont égales à $\frac{a+c}{2}$, $\frac{2c}{2}$, $\frac{c+b}{2}$. Pour obtenir leur surface, il faut multiplier chacune de ces dimensions par le tiers de la largeur l , soit la largeur totale par le tiers de chacune d'elles, d'où l'on tire pour leur somme : $l \cdot \left\{ \frac{a+c}{2.3} + \frac{2c}{2.3} + \frac{c+b}{2.3} \right\}$
 $= l \cdot \frac{4c+a+b}{6}$, expression dans laquelle le coefficient de l donne pour la hauteur moyenne correspondante,
 $x = \frac{4c+a+b}{2.3}$.

Soit encore, $3x = 2c + \frac{a+b}{2} = 2c + c \pm f = 3c \pm \frac{3f}{3}$;
d'où enfin $x = c \pm \frac{f}{3}$.

Cette même réduite x peut donc s'exprimer beaucoup plus simplement en fonction de c et de f . Elle est égale à l'ordonnée intermédiaire de la courbe $\left\{ \begin{array}{l} \text{augmentée} \\ \text{diminuée} \end{array} \right\}$ du tiers de la flèche que son prolongement détermine dans l'arc, quand celui-ci tourne sa $\left\{ \begin{array}{l} \text{convexité} \\ \text{concavité} \end{array} \right\}$ vers l'axe des abscisses.

Quand donc, on voudra opérer arithmétiquement, il faudra employer la première de ces deux valeurs de x , tandis que, lorsqu'il y aura lieu d'appliquer le procédé graphique, la deuxième devra être exclusivement préférée.

Comme il est toujours possible de ramener à des éléments de forme mixtiligne pareille, toute surface entièrement comprise dans des lignes courbes, on voit que cette solu-

tion approximative s'applique sans exception à la mesure générale des surfaces à périmètre partiellement ou entièrement courbes.

La solution précédente consiste uniquement à substituer à l'arc de courbe un polygone rectiligne qui n'en diffère pas d'une manière trop sensible, et dont les côtés soient assujettis à rencontrer en trois points la courbe donnée.

On pourrait remplacer ce polygone lui-même par un seul arc de parabole ayant quatre points communs avec l'arc proposé. Comme la quadrature de la parabole est alors une opération extrêmement simple, cette substitution serait de nature à donner des résultats plus exacts que la précédente, si jamais le besoin s'en faisait sentir.

Lemme : la surface du segment parabolique compris entre l'arc et la corde est égale aux deux tiers du triangle formé par la corde et les deux tangentes extrêmes à cet arc.

La courbe partage donc ce triangle en deux parties qui sont entre elles dans le rapport de un à deux. Cette dernière proposition va devenir évidente, si, en opérant par soustractions successives sur les deux parties à comparer, on parvient à en retrancher une suite de termes décroissants, qui, pris par couple, soient constamment entre eux dans le rapport sus-mentionné.

Traçons celle des tangentes intermédiaires qui est parallèle à la corde, et qui divise par moitié les deux tangentes extrêmes (voir la propriété métrique déjà signalée, page 19); elle détachera, dans l'une des surfaces à comparer, un triangle égal au quart du triangle primitif, et, par conséquent, égal à la moitié du triangle qui, dans l'autre, aura la corde pour basé, et son sommet placé au point de contact de la tangente intermédiaire. Soustrayant, de part et d'autre, ces deux portions qui sont entre elles dans le rapport voulu, nous aurons à prouver

que les restes de cette double soustraction superficielle sont toujours entre eux dans le même rapport ; mais ces restes se composent de deux figures de forme identique à celle sur laquelle nous venons d'opérer : on y retrouve encore un arc de parabole qui divise le triangle formé par ses deux tangentes extrêmes et par sa corde ; nous pouvons donc y renouveler la soustraction précédente , et la reproduire indéfiniment de reste en reste. Nous aurons ainsi décomposé chacune des surfaces ou deux séries décroissantes qui , prises terme à terme , sont entre elles dans le rapport que nous avons annoncé ci-dessus.

Quand donc il s'agira d'évaluer un pareil segment parabolique , il suffira de mener les deux tangentes extrêmes et de prendre graphiquement les deux tiers du triangle qu'elles forment avec la corde. Nous n'insisterons pas sur toutes les transformations superficielles auxquelles cette propriété peut donner lieu , ce serait nous livrer à des redites inutiles.

On trouvera au chapitre des interpolations le procédé graphique , au moyen duquel on détermine les tangentes extrêmes d'un arc de parabole passant par quatre points donnés. Cette construction est linéaire , quand les points forment un trapèze.

Si l'on a donc à opérer la quadrature d'un polygone mixtiligne quelconque , en prenant quatre points convenablement disposés sur chacun des côtés courbes qu'il présente , on remplacera ceux-ci par autant d'arcs de parabole ; et , après avoir évalué la surface donnée en substituant d'abord les cordes aux arcs , il ne restera plus qu'à faire subir au total , ainsi obtenu , les modifications qui seront la conséquence de la quadrature parabolique des segments corrélatifs à chaque corde prise à part.

L'erreur commise , dans chacune de ces quadratures partielles , se bornera à la différence de surface embrassée par les deux courbes superposées , différence tou-

jours minime, puisque les deux courbes se coupant en quatre points, les erreurs en plus et en moins doivent, en général, se balancer très-approximativement.

On ramènera la recherche de toute surface, comprise dans un contour entièrement courbe, aux conditions des tracés précédents, en menant dans ces dernières une ligne diamétrale que l'on choisira la plus longue possible. La somme des ordonnées moyennes prises par rapport à cette ligne, et déterminées, d'après les méthodes que nous venons d'exposer, donnera une grandeur linéaire totale qu'il suffira de modifier dans une proportion qui soit en rapport avec la largeur commune des trapèzes accouplés, pour obtenir linéairement la surface cherchée.

Quant au cercle, à l'ellipse et aux autres courbes régulières, pour obtenir leur mesure linéaire, il suffira de traduire graphiquement la formule connue qui donne leur surface, ce qui se réduira, par conséquent, à opérer une simple multiplication superficielle.

Nous donnerons, dans la troisième partie, le moyen d'obtenir la grandeur des circonférences qui entrent comme facteurs dans la plupart de ces formules.

MODIFICATION DIRECTE DES SURFACES.

Nous avons vu, dans ce qui précède, que dès qu'on avait obtenu la mesure linéaire d'une surface donnée, les modifications en plus et en moins qu'on faisait subir à cette mesure correspondaient nécessairement à des changements analogues dans la surface primitive; mais il est une foule de circonstances où ce genre de calcul indirect ne serait pas de nature à remplir le but qu'on se propose; ce sont particulièrement celles où la forme de la surface entre comme condition principale du problème à résoudre. Nous allons, en conséquence, indiquer quelques-uns des moyens que l'on peut employer pour modifier directement les surfaces elles-mêmes.

L'addition et la soustraction directes des surfaces s'exécutent d'après les mêmes principes que les opérations linéaires analogues : la première a lieu par juxta-position, et la seconde par superposition ; le total de l'addition est la surface comprise dans le nouveau contour ; le reste de la soustraction est la portion de surface qui ne se trouve pas doublée par le fait de la superposition.

Pour que l'addition directe soit possible, il faut, de plus, que chacun des deux termes à ajouter présente, dans son périmètre, une portion linéaire qui soit à la portion correspondante dans les relations d'incrustation et de relief. C'est par le rapprochement des deux lignes que la juxta-position s'opère. Ces lignes disparaissent ainsi du contour définitif qui embrasse le total. Quand cette dernière condition ne peut être remplie, les deux surfaces n'ayant entre elles que des points de contact isolés, ne peuvent pas être envisagées comme formant un total distinct.

La soustraction n'exige pas impérieusement cette dernière condition ; mais il est évident que le reste est bien plus facile à évaluer, toutes les fois qu'elle peut être satisfaite ; ce qui a presque toujours lieu quand le contour des deux termes se compose de lignes droites.

La projection est encore un moyen de modifier les surfaces : quand on projette orthogonalement une surface plane quelconque sur un autre plan, pris à volonté, le rapport entre la partie projetée et la projection obtenue est constamment égal à celui qui existe entre le rayon et le cosinus de l'angle d'inclinaison que les deux plans forment entre eux.

Comme la chose est évidente, pour une simple droite ; quand celle-ci se trouve située, sur le plan à projeter, dans une direction perpendiculaire à la charnière commune, il va nous être facile d'en conclure que la même relation doit exister pour tout triangle mesuré par une droite qui affecterait la même direction.

On satisfait à cette dernière condition, dans un triangle quelconque, en lui assignant pour unité linéaire de mesure, la moitié de la transversale, qui, partant du sommet intermédiaire par rapport à la charnière, est menée dans son plan parallèlement à celle-ci; le triangle, considéré comme un quadrilatère dont cette transversale serait la diagonale, aura pour mesure superficielle la somme des perpendiculaires abaissées sur cette diagonale des deux sommets opposés. Dans le quadrilatère projeté la diagonale conservera sa grandeur primitive, et les perpendiculaires homologues la couperont encore à angle droit: la somme de ces perpendiculaires mesurera donc, à son tour, la surface projetée. La proposition se trouvant ainsi démontrée pour un triangle quelconque, s'applique, par extension, d'abord à tous les polygones; et, en passant à la limite, à toutes les surfaces terminées par des lignes droites ou courbes.

La démonstration précédente serait la même, quelle que fût l'inclinaison des ordonnées projetantes sur la surface projetée, sauf qu'il faudrait y remplacer l'unité et le cosinus par la perpendiculaire et sa projection. Il s'ensuit que pour avoir le rapport qui existe entre deux surfaces qui sont entre elles dans la relation de projection réciproque, il suffit de prendre celui de deux perpendiculaires à la charnière, pourvu quelles soient homologues dans les deux surfaces.

Par la projection polaire, opérée sur deux plans parallèles, on obtient des figures dites semblables, et dont les surfaces sont entre elles dans le rapport des secondes puissances de leurs lignes homologues.

La multiplication et la division des surfaces pourraient avoir lieu par un procédé analogue à celui qui a été employé pour les lignes, et s'exécuteraient entre deux plans coordonnés. Le sens de projection y serait donné sur deux conjuguées quelconques élevées, dans chacun des plans,

perpendiculairement à la charnière et partant, sur celle-ci, d'une même origine.

La réduction des polygones en triangles équivalents, est une de ces opérations dans lesquelles, la forme se trouvant l'objet principal du problème, on est forcé d'avoir recours, pour le résoudre, à l'addition et à la soustraction directe des surfaces.

Le tracé par lequel on parvient à cette réduction se fonde sur la proposition suivante : dans un trapèze quelconque, les deux diagonales et les deux côtés non parallèles forment deux triangles distincts, opposés par un de leurs sommets, et qui sont tous deux équivalents en surface. Si l'on se rapporte, page 70, à la démonstration de l'équivalence des deux triangles abc et $bb'c'$, on reconnaîtra qu'elle résulte de celle des deux triangles aob' et $cc'o$ qui forment dans le trapèze $ab'cc'$ le couple distinct dont nous venons de parler : cette démonstration s'applique à un trapèze quelconque.

Soit donné, en conséquence, Pl. III, *fig. 1*, le polygone $abcdef$ qu'il s'agit de réduire à un nombre de côtés moindre, sans modifier l'étendue de sa surface.

En menant toutes les diagonales qui aboutissent à un même sommet a , nous le diviserons en autant de triangles qu'il contient de côtés moins deux ; car il y aura deux de ces triangles qui renfermeront chacun dans leur périmètre, deux des côtés du polygone primitif et une seule diagonale. Si sur une de ces dernières lignes ac , prise comme côté parallèle, on construit un trapèze $acbc'$, dont un des côtés primitifs bc constituera la diagonale, tandis que les côtés non parallèles seront fournis, l'un par ba et l'autre par cd prolongé, le point c' se trouvera le sommet d'un nouveau polygone $ac'def$ d'un nombre de côtés moindre et d'une surface équivalente au premier, puisque ce nouveau polygone résulte de l'addition du triangle $cc'o$ et de la soustraction du triangle boa , opérations

qui se détruisent, ces triangles formant le couple distinct équivalent du trapèze *bacc'*.

Comme pour trouver le nouveau sommet *c'*, nous n'avons eu qu'à mener par l'angle *b* une parallèle à la diagonale *ac*, qui soutend cet angle, jusqu'à la rencontre de la direction *cd*; par la même raison, nous trouverons *d'* en menant par *c'* une parallèle à la diagonale *ad*, jusqu'à la rencontre de la direction *de*, et *e'* en opérant d'une manière analogue sur le prolongement de *ef*; et comme à chacune de ces opérations, on aura réduit d'un côté le contour primitif, *afe'* formera le périmètre du triangle équivalent cherché. On obtiendra, par conséquent, la mensuration de cette surface en appliquant au triangle *afe'*, un quelconque des procédés de mensuration indiqués ci-dessus.

Si le dernier côté du polygone se trouvait égal à deux unités, on parviendrait immédiatement, par cette transformation, à un triangle équivalent en surface, et qui aurait pour mesure la hauteur correspondante à ce côté. Quand cette circonstance n'a pas lieu, on peut, en quelque sorte, la créer à volonté; il suffit de supposer que le triangle final représente un quadrilatère, ayant un de ses côtés égal à deux unités, et adjacent sur sa propre direction à un angle qui se serait progressivement ouvert jusqu'à former deux droits; ce qui exigera encore une réduction à opérer dans le contour polygonal. Cette manière d'envisager le problème, conduit, sans avoir besoin de changer de tracé, à la mesure immédiate du polygone proposé.

On peut remarquer que cela revient à obtenir la mesure du triangle *afe'* par l'emploi du deuxième procédé de mensuration; ce procédé n'étant, lui-même, qu'un cas particulier de la méthode générale de réduction que nous venons d'exposer.

Nous donnerons encore un autre exemple des additions et soustractions de surface qui se rapporte à une

des propositions les plus célèbres de la géométrie élémentaire.

Supposons que l'on ait construit, Pl. III, *fig. 2*, dans le plan du triangle rectangle abc , d'une part, le carré $acde$, sur l'hypothénuse, et de l'autre le carré $abgf$, sur le grand côté de l'angle droit, et que l'on demande quel est le reste de la soustraction de ces deux surfaces :

Lemme. Si l'on soustrait du grand carré quatre fois le triangle primitif placé, comme le présente la figure, dans une position symétrique par rapport à chacun des côtés de ce carré, le reste sera un autre carré $blmn$, ayant pour côté $ab - ac$. En soustrayant à son tour ce dernier carré de $abgf$, le reste sera, d'un côté, un parallélogramme $abch$ égal à deux fois le triangle abc , et de l'autre, un parallélogramme identique gl diminué d'une portion égale au carré $alhi$.

Ayant ainsi décomposé chacun des termes à comparer en parties superposables entre elles, il ne nous reste plus qu'à procéder à leur soustraction effective.

Opérant cette soustraction par parties, nous trouverons que le carré fi recouvrira le carré bm ; et que le rectangle ca recouvrira deux des quatre triangles du contour; mais, comme les deux triangles restants ne pourraient être recouverts en entier par le rectangle gi ; et, comme ils le seraient par le rectangle total gl , il s'ensuit que la partie non recouverte sera exactement égale à $hila$, c'est-à-dire; au carré construit sur le petit côté cb . Donc, enfin; si du carré construit sur l'hypothénuse, on retranche le carré construit sur un des côtés de l'angle droit, le reste de la soustraction sera égal en surface au carré construit sur l'autre côté.

Nous bornons à ces deux exemples ce que nous avons à dire de la modification effective des surfaces. Les opérations d'un ordre plus élevé doivent s'exécuter de préférence sur leurs représentations linéaires. Nous allons

donner quelques problèmes de ce dernier genre dans lesquels on opère sur les lignes de la surface elle-même.

Supposons qu'il s'agisse de partager la surface d'un triangle en parties qui soient entre elles dans un rapport donné, au moyen de lignes assujetties à passer par un des points de son périmètre.

Premier cas : Si les lignes de division doivent passer par un des sommets du triangle, il suffira de diviser le côté opposé dans le rapport demandé, et d'en joindre les subdivisions au sommet qui a été donné pour point de départ. En adoptant pour unité, Pl. III, *fig. 3*, la demi-hauteur, *bd* les triangles *bae* et *bec* auront pour mesure linéaire de leur surface les segments *ae* et *ec*; leurs surfaces seront par conséquent entre elles dans le rapport qui aura servi à déterminer les segments de la base opposée.

Deuxième cas : Diviser le même triangle, dans le même rapport, en assujettissant la ligne sécante à prendre son point de départ en *c'* sur le côté *ac*.

En se reportant à la solution précédente, on ramènera sans peine le nouveau problème à faire passer par *c'* une droite qui détache de l'angle *c* une portion équivalente à *bae*, ce qui s'obtient en menant par *e* une parallèle à la direction *cb*, et joignant le point *f* où cette parallèle coupe le côté opposé au point *c'*. On reconnaît, dans ce tracé, la construction au moyen de laquelle on ramènera le quadrilatère *bfc'e* à un triangle équivalent *bec*. Ainsi conçu, ce problème est susceptible d'une seconde solution; car, en plaçant l'équivalent du triangle *bea* dans la position *bdc*, *dg* est la ligne homologue à *ef*, et par conséquent *c'g* est la seconde transversale qui divise le triangle dans le rapport demandé. Si donc les portions *cd* et *ae* étaient chacune le tiers de la ligne *ac*, les deux sécantes, partant du point *c'*, diviseraient le triangle en trois parties égales. On transformerait, par un procédé identique, toute division opérée dans le triangle à partir

de l'angle b en une division pareille opérée à partir d'un point quelconque situé sur le côté opposé à cet angle.

Troisième cas. Opérer la même division par une ligne parallèle à une direction donnée. Soit, *fig. 4*, le même triangle dont il s'agit de retrancher une portion représentée par bag , au moyen d'une ligne parallèle à sa base ac .

En prenant pour unité la demi-hauteur ah , la surface du grand triangle est mesurée par cb , et celle du triangle semblable cherché par le segment bg ; $\sqrt{cb}$ et $\sqrt{bg}$, seront donc les côtés des carrés équivalents à ces deux triangles; donc, enfin, leurs côtés homologues devront être entre eux dans les rapports des côtés de ces carrés, puisque des carrés sont nécessairement des figures semblables.

Si donc, nous ajoutons bg à bc , et si, sur le total cb' nous construisons une demi-circonférence, toute droite, parallèle à dg , projettera entre les deux conjuguées rectangulaires bd et bc dans le sens de $\sqrt{cb}$ à $\sqrt{bg}$; donc, enfin, en portant cb sur bd , et la projetant en m , on déterminera la grandeur bm du côté homologue, et en menant par ce point une parallèle à la direction donnée, le problème se trouvera résolu.

Cette construction admet une vérification très-simple: on reconnaîtra que l'on a opéré juste, quand les quatre points $gmna$ détermineront un trapèze; car cette dernière condition est une conséquence forcée de l'équivalence des deux triangles agb et amn .

Il en résulte, que le problème précédent revient à trouver un trapèze qui ait la ligne ag pour diagonale, et dont la seconde diagonale mn soit assujettie tout à la fois à se trouver parallèle à la direction donnée, et à avoir ses deux extrémités placées sur les côtés ab et bc : sous cette nouvelle forme, sa solution va prendre un caractère plus général.

Fig. 5. Un couple quelconque de parallèles passant par a et par g , coupe les deux côtés de l'angle abc en

deux autres points, tels que la seconde diagonale qu'ils déterminent dans chaque trapèze ainsi formé, détachera constamment de l'angle fixe abc un triangle équivalent au triangle agb ; dès lors, toutes ces diagonales ag , cd , eh , sont les tangentes d'une même hyperbole qui a pour asymptotes les deux côtés ba et bc , et toutes ces tangentes ont leur point de contact situé au milieu de la distance que les asymptotes interceptent sur chacune d'elles. En menant donc à l'hyperbole une tangente parallèle à la direction donnée, on satisfait aux conditions du problème qui, comme on voit, comporte deux solutions.

Ces préliminaires admis, nous avons à mener deux tangentes parallèles à la direction donnée $a'c'$, ou, ce qui revient au même, à chercher l'intersection du diamètre conjugué bc'' , qui divise en parties égales les cordes asymptotiques parallèles à cette direction.

On obtiendra ces deux points par tâtonnement, en faisant mouvoir un double décimètre, ou toute autre mesure graduée, autour du point de contact n de ag , jusqu'à ce qu'on ait trouvé la direction mr pour laquelle le segment mn intercepté entre ce point et l'asymptote en regard, soit exactement égal à celui qui se trouve intercepté entre la ligne bc'' , et la seconde asymptote. Ce résultat obtenu, la règle graduée coupera le diamètre au point i où celui-ci rencontre l'hyperbole; et, par conséquent, on n'aura plus qu'à mener par ce point une droite parallèle à la direction donnée. Cette solution est particulièrement applicable sur le terrain, et nous aurons occasion d'indiquer une circonstance où il convient d'y avoir recours, de préférence à toute autre.

On pourrait également parvenir à ces deux points du contour hyperbolique, par un tracé rigoureux: il faut alors, Pl. III, *fig. 6*, mener un cercle quelconque tangent aux deux asymptotes, et considérer le cône qui aurait ce cercle pour trace, et dont le sommet se trouverait projeté en b .

Un plan tangent, suivant la génératrice qui se confond avec bm , contiendra la tangente ga à l'hyperbole rapportée sur cette surface conique; et, comme ce plan aura sa trace en nl , le point l appartiendra, sur cette trace, au plan sécant qui détermine notre hyperbole sur le cône, et qui contient pareillement cette tangente. Tout étant symétrique dans la figure, la trace lp de ce plan sera perpendiculaire à la direction de l'axe du cône et de l'hyperbole. Si, donc, par la génératrice du cône qui se projette, suivant le diamètre conjugué bc' , nous menons à la surface un second plan tangent, sa trace sp viendra couper en p celle du plan sécant; ce point appartiendra donc à la tangente cherchée; il en sera de même du point t situé sur l'intersection commune bt des deux plans, et sur la tangente ga . La figure comportant un double tracé, les lignes homologues y sont indiquées par les mêmes lettres.

Nous nous sommes arrêtés sur cette dernière forme de solution, parce que l'hyperbole dont nous l'avons fait dépendre, et qui semble au premier abord tout à fait étrangère aux conditions des problèmes qui nous occupent, devient absolument indispensable, pour peu que ces conditions se compliquent. Si on nous demandait, par exemple, de soustraire le tiers d'un triangle, à partir de l'un des sommets, par une ligne assujettie à passer par un point i intérieur à son périmètre, il faudrait encore opérer la division ternaire correspondante par un des sommets adjacents à celui qu'il s'agit de détacher; construire l'hyperbole que cette ligne de division auxiliaire touche et détermine; et mener par le point i , deux tangentes à cette hyperbole. De cette dernière construction, il est facile de conclure que ce nouveau problème sera susceptible de deux solutions, quand le point sera situé hors de l'hyperbole; qu'il n'en admettra qu'une seule, si le point fait partie du contour hyperbolique; et enfin, qu'il n'y aura pas de solution possible, quand il se trou-

vera situé dans la partie intérieure : celle d'où on ne peut mener de tangentes à la courbe.

Si l'on proposait d'opérer, dans un quadrilatère quelconque, des divisions analogues à celles que nous venons d'exécuter dans un triangle, il faudrait déterminer encore, le plus simplement possible, une surface égale à la partie aliquote qu'on veut en retrancher ; et la placer ensuite, elle ou l'une de ses équivalentes, dans l'endroit même où la soustraction doit avoir lieu.

La première de ces opérations consistera à mener dans la figure une diagonale quelconque, ainsi que les parallèles à sa direction passant par les deux sommets qui lui sont opposés. Nous appellerons ces deux dernières les parallèles capables d'un quadrilatère à surface constante et à diagonale fixe, ou simplement *parallèles capables*. Dès lors, en choisissant sur la diagonale fixe une partie linéaire aliquote, proportionnelle à la subdivision superficielle qu'on se propose d'obtenir, tout quadrilatère partiel qui aura cette partie pour diagonale invariable, et dont les deux sommets mobiles seront assujettis à se trouver sur les parallèles capables, offrira pour surface la partie aliquote demandée.

Si on voulait avoir cette surface partielle sous la forme triangulaire, il suffirait de transporter parallèlement à elle-même la portion correspondante de la diagonale fixe au centre des deux parallèles capables, et de l'y doubler : le quadrilatère auquel elle donnerait naissance, dans cette nouvelle position, serait composé de deux triangles égaux chacun à la surface demandée.

On peut encore retrancher d'un quadrilatère une partie aliquote déterminée de forme quadrangulaire, sans recourir aux parallèles capables ; car si, après avoir mené une des diagonales de la figure, on opère, à partir de cette diagonale, dans chacun des triangles qu'elle détermine, une soustraction triangulaire aliquote de même indice, les

deux triangles partiels à soustraire se trouveront accolés suivant cette ligne commune, et leur ensemble formera, en conséquence, un autre quadrilatère dont la surface sera, au quadrilatère primitif, dans le rapport demandé. Le quadrilatère donné, et sa partie aliquote ayant une diagonale commune, les distances de leurs parallèles capables respectives seront forcément entre elles dans le même rapport qui existe entre les deux surfaces; mais on voit que cette dernière considération n'a pas été directement employée à la solution.

La seconde partie du problème se résoudra encore au moyen des deux parallèles capables, puisqu'il n'y aura qu'à faire varier les sommets libres d'un quadrilatère partiel sur ces deux parallèles, pour obtenir toutes les formes équivalentes sous lesquelles il peut se présenter.

Nous allons donner quelques exemples de ces modifications : par le centre de la diagonale fixe, menons une droite quelconque, et prenons sa partie interceptée entre les deux parallèles capables pour seconde diagonale, leur ensemble donnera la forme équivalente dans laquelle les diagonales partagent le quadrilatère en quatre triangles, égaux deux à deux.

En opérant le même genre de transformation, après avoir transporté la diagonale fixe, parallèlement à elle-même, au centre des deux parallèles capables, on arrivera à la forme dans laquelle les diagonales se coupent toutes deux à leur centre commun. On aura donc transformé le quadrilatère donné en un parallélogramme équivalent.

Il va sans dire que, dans tout quadrilatère, les deux diagonales sont entre elles en raison inverse de la distance que mesurent les deux parallèles capables qui leur correspondent, et que cette relation suffit pour établir sur une ligne quelconque prise pour côté ou pour diagonale un quadrilatère équivalent à un autre donné.

Parmi les problèmes qui se rattachent à la subdivision

d'un quadrilatère, on peut remarquer celui qui consisterait à trouver un point intérieur, tel que les lignes menées par lui aux quatre angles déterminassent quatre triangles équivalents. Comme les lignes qui unissent un angle quelconque au centre de la diagonale opposée sont le lieu du sommet commun de tous les triangles équivalents qui ont pour base les côtés adjacents à cet angle, on reconnaît sans peine que ce problème, qui ramènerait la figure à représenter la projection d'une pyramide dont les quatre faces se projetteraient suivant des triangles équivalents, n'est susceptible d'une solution certaine que si les diagonales se coupent ensemble ou séparément à leur centre; or cette catégorie constitue évidemment une exception. Mais il est un autre problème du même genre, qui se rapporte aux cubatures, et qui est susceptible d'une solution générale, bien qu'il paraisse dépendre, en quelque sorte, du précédent; c'est celui qui consiste à diviser un quadrilatère donné en cinq autres tous équivalents, dont l'un occuperait la partie centrale de la figure, tandis que les quatre autres seraient le résultat de la jonction de ses angles à ceux du quadrilatère primitif: le tout constituant la projection d'un tronc de pyramide quadrangulaire à faces latérales gauches, et dont chacune se projeterait suivant un quadrilatère équivalent au cinquième de la base.

Pour parvenir au tracé d'une pareille figure, on cherchera d'abord le cinquième du quadrilatère donné, par le moyen indiqué ci-dessus; et on transformera ce cinquième de façon à ce que, appliqué sur la ligne gh , Pl. III, *fig. 7*, son côté opposé lui soit à peu près parallèle; ce que l'on est toujours maître d'exécuter en disposant de sa diagonale fixe dg , de façon à ce que la parallèle capable correspondante mn embrasse extérieurement le point g , disposition qui permettra de donner à de la direction voulue.

On appliquera ensuite ce même cinquième sur les

deux côtés adjacents ch et fg , en adoptant pour diagonale fixe, d'une part cd , et de l'autre ef , il en résultera un hexagone $cadebf$, et arrivé à ce point, le problème se réduira à disposer, sur nb et sur ma , des sommets variables a et b , de telle sorte, que la ligne ab divise l'hexagone en deux parties égales.

C'est à quoi l'on parvient par les considérations suivantes : prenez le point b sur la diagonale ob , du parallélogramme que l'on obtient en composant, à partir du point o , les côtés de et cf , comme s'ils représentaient deux forces, l'équivalence des deux triangles bed et cbf en résultera. Du point b , ainsi déterminé, menez une droite au centre de cd ; cette construction déterminera à son tour l'équivalence de tous les triangles, tels que cab et abd , qui auront leur sommet commun sur cette ligne. Donc, le point a , où elle rencontre la parallèle capable ma correspondant à cd , sera le dernier angle cherché; puisque nous venons d'établir l'équivalence des deux couples de triangle qui composent les deux quadrilatères $abcf$ et $abde$.

Nous avons indiqué toute cette solution d'une manière sommaire, pour ne pas compliquer notre travail de détails trop minutieux, et surtout, parce qu'il nous suffira, plus tard, dans l'application que nous nous proposons d'en faire, d'avoir démontré la possibilité d'une semblable subdivision.

CENTRES DE GRAVITÉ.

Nous terminerons ce que nous avons à dire des surfaces par quelques mots sur le moyen d'obtenir leurs centres de gravité.

On sait que pour déterminer celui d'un triangle quelconque, il faut joindre un des sommets au milieu de la base qui lui est opposée. En répétant cette opération, par rapport à deux sommets quelconques, on ob-

tiendra le centre de gravité qui se trouve placé sur les deux lignes ainsi tracées, au tiers de la distance totale qu'elles comportent, ce tiers mesuré à partir de la base à laquelle chacune des lignes aboutit.

Quand le triangle diminue par le rapprochement d'un de ses sommets, cette construction ne cesse pas d'être exacte ; donc, quand le triangle se projette suivant une droite, elle est encore vraie. Cette recherche du centre de gravité s'applique, en conséquence, à trois points également pesants, situés d'une manière quelconque sur une droite, comme elle s'appliquerait à trois points placés aux trois sommets du triangle.

Pour obtenir le centre de gravité des sommets d'un quadrilatère quelconque, on peut le regarder comme la projection d'une pyramide triangulaire. On prendra donc, après avoir mené une quelconque de ses diagonales, le centre de gravité du triangle qu'on choisira pour représenter la base-pyramidale ; joignant ce point à l'angle qui représente le sommet, on mesurera sur cette dernière, à partir de la base, une distance égale au quart de sa grandeur ; et le point correspondant sera le centre de gravité des sommets du quadrilatère.

Une construction encore plus simple consiste à joindre deux à deux les milieux des côtés opposés ; chacune des lignes de jonction contient encore le centre de gravité des quatre sommets, qui se trouve, par conséquent, à leur point de rencontre. Nous verrons plus tard que les six lignes qui composent cette dernière figure, peuvent être considérées comme la projection de six génératrices d'un même paraboloïde.

La droite qui joint les milieux des diagonales passe également par le centre de gravité des quatre sommets ; et toutes ces intersections ont encore lieu quand le quadrilatère est gauche.

On parvient, par les considérations suivantes, à la dé-

termination du centre de gravité de la surface d'un quadrilatère; ce point doit se trouver sur la ligne qui joint les centres de gravité des deux triangles partiels, dont tout quadrilatère se trouve formé; et, comme on peut employer indifféremment les deux diagonales à cette division triangulaire, il en résulte qu'il se trouvera à l'intersection des droites que l'on obtient dans chacun des deux modes de division.

Or, il est facile de reconnaître que chacune de ces droites, prises à part, doit être parallèle à la diagonale momentanément supprimée, et doit s'en trouver distante d'une grandeur égale au tiers de la différence qui existe entre le grand et le petit segment de la diagonale qui aura été choisie pour opérer la division triangulaire.

A partir de l'extrémité qui, sur chaque diagonale, correspond au grand segment, et soustractivement à ce dernier, on portera donc le petit segment correspondant; on construira un parallélogramme sur les deux portions de ligne qui constituent le reste de cette double soustraction, et l'on trouvera le centre de gravité cherché au tiers de la diagonale qui, dans ce parallélogramme, aboutit au point de rencontre des diagonales du quadrilatère, cette distance mesurée à partir de ce dernier point.

Ainsi déterminé, le centre de gravité remplira, par rapport aux deux diagonales, la double condition de distance parallèle à laquelle il devait se trouver assujéti.

MESURE DES CUBES.

L'idée des corps est pour nous étroitement liée à celle de la place qu'ils occupent : cette place est dite pleine tant qu'ils s'y trouvent encore, et vide dès qu'ils viennent de la quitter; il faut de plus qu'une place soit vide, pour qu'un autre corps puisse venir l'occuper à son tour. En l'absence des corps, nous conservons une idée com-

plète de l'identité du vide qu'ils laissent après eux ; car, nous savons que cette place ne peut être exactement remplie que par un corps de forme et de position absolument conforme au premier, et qui lui serait rigoureusement superposable si les corps pouvaient se pénétrer entre eux ; aussi quand un corps exécute un mouvement à notre portée, nous pouvons tout à la fois : 1° le suivre dans les positions successives qu'il peut prendre sous nos yeux ; 2° nous le représenter dans toutes celles précédemment occupées par lui ; 3° nous le figurer, en outre, dans celles qu'il pourrait occuper par suite d'une modification ou d'une extension quelconque du mouvement primitif, et cela, quand même cette dernière supposition devrait l'entraîner tout à fait hors de la portée de nos sens : les lois que nous venons de rappeler ne cesseraient pas d'exister pour lui ; elles sont tout à fait indépendantes du lieu particulier qu'il occupe momentanément.

L'ensemble de toutes les places qu'un corps pourrait successivement occuper et laisser vides, s'il était seul dans la nature, emporte avec lui une idée absolue ; car elle ne souffre ni limites, ni exceptions ; nous ne pouvons, en effet, désigner sur toutes les directions qui rayonnent, autour de nous, aucun emplacement qui ne puisse être occupé par un corps, excepté ceux qu'un autre corps occuperait d'avance. Si donc, nous comprenons cet ensemble lui-même sous le nom générique d'*espace*, il est évident que nous aurons désigné par là un tout sans limites, et qui s'étend indéfiniment dans toutes les directions qu'un corps mobile peut prendre.

Considérer plus particulièrement dans cet ensemble, soit un corps, soit un des vides que ce corps pourrait occuper, s'il y était transporté, c'est distinguer une partie dans un tout, c'est définir, c'est séparer, c'est abstraire ; idées relatives que nous ne pouvons compléter qu'en donnant une forme déterminée, c'est-à-dire, des

limites à la partie que nous considérons ; car une partie qui n'aurait pas de limites se confondrait nécessairement avec le tout qui , étant infini , n'en saurait admettre lui-même.

Les limites des corps sont les surfaces : ce sont elles qui , par leur nature et leur position respectives , en déterminent ce qu'on appelle la forme , et les distinguent de l'espace qui les entoure ; elles sont composées de la succession des points qui peuvent être soumis à la vue et au toucher. Ces limites sont nécessairement doubles ; car la présence d'un corps limite à son tour l'espace par rapport à la portion vide qu'il lui retranche ; de sorte qu'entre l'espace total et le corps , il y a le lieu d'une section ou d'une rupture qui s'opérera par disjonction , quand , par suite d'un mouvement quelconque , la surface qui limite le corps se détachera de la surface qui limite l'espace autour d'elle. Deux formes essentiellement distinctes , quoique exactement superposables , résultent de cette coexistence de limites ; l'une est la forme *relief* , celle du plein , qui appartient au corps ; l'autre la forme *incrustation* , celle du vide , qui se rapporte à ce qui reste de l'espace total , quand le corps en est retranché.

Cette double surface , que le raisonnement seul vient de nous indiquer , apparaît aux yeux lorsqu'on sépare mécaniquement un corps quelconque en deux parties. La surface totale du corps primitif se trouve , après la séparation , augmentée d'une surface relief et d'une surface incrustation , qui forment la double paroi du joint de rupture et qui , comme telles , sont respectivement égales en étendue.

La sphère fournit un des exemples les plus remarquables de la différence qui existe entre le relief et l'incrustation d'un même corps ; le relief sphérique ne peut être embrassé par l'œil que partiellement ; tandis que l'œil placé en présence de l'incrustation sphérique pourrait , en

quelque sorte , l'embrasser dans tout son ensemble : l'une des surfaces a nécessairement un contour apparent , l'autre ne saurait en avoir dans aucune circonstance.

Outre les divisions réelles de l'espace qui résultent , comme nous venons de le voir de la présence des corps matériels dans un lieu déterminé ; nous pouvons en créer indéfiniment par la pensée. Nous sommes libres d'imaginer , en effet , qu'une certaine portion de l'espace total est devenue solide , et nous pouvons déterminer arbitrairement les solutions complètes qui la retranchent de l'espace. Par ce seul fait , nous créons , en quelque sorte , les deux formes incrustation et relief qui se trouvent alors en présence ; et , comme rien ne limite le pouvoir créateur que notre imagination possède , nous pouvons attribuer aux surfaces qui en résultent non-seulement toutes les formes possibles , mais encore toutes les perfections de forme que nous sommes susceptibles de concevoir ; et par conséquent leur attribuer même une perfection qui serait absolue dans sa loi de formation.

Quand on soumet ainsi l'espace au pouvoir de la pensée , parmi toutes les divisions à imaginer , la plus simple est celle qui le partage en deux parties égales : celle , par exemple , qui distinguerait à un instant donné toute la portion de l'espace qui est située à notre droite de celle qui est située à notre gauche. Cette supposition produirait nécessairement une section infinie en prolongement de celle qui , dans notre corps , sépare la gauche de la droite ; et comme on ne pourrait rien dire d'une des moitiés de l'espace qui ne s'appliquât à l'autre , les deux surfaces qui leur serviraient de limite seraient nécessairement identiques entre elles. Dans ce cas particulier , la forme relief n'aura rien qui la distingue de la forme incrustation : elles pourront donc glisser l'une sur l'autre sans que la juxta-position mathématique cesse d'exister entre elles ; car une séparation

partielle signifierait une différence dans les deux surfaces, et par suite dans les deux moitiés. Une pareille section est dite plane : les surfaces qui en résultent reçoivent par analogie la même dénomination, et s'appellent surfaces planes ou plans : on confond assez souvent et la section et les surfaces sous le nom générique de *plan*. Nous pensons qu'il est toujours nécessaire de distinguer les deux surfaces relief et incrustation de la section unique qui les produit.

Si nous admettons l'existence simultanée de deux sections planes, nous aurons divisé l'espace en quatre parties égales, deux à deux, parce qu'elles sont deux à deux superposables : ces parties sont appelées angles dièdres. En ajoutant une section nouvelle combinée avec les deux autres, elle produira dans l'espace huit divisions qui seront pareillement égales deux à deux, mais qui ne seront pas superposables. Ces nouvelles divisions, qui sont chacune comprises entre trois plans, se nomment angles trièdres ; elles ont chacune pour opposé au sommet l'angle trièdre qui leur est équivalent en volume.

Pour se convaincre de l'impossibilité de superposition de ces deux parties de l'espace qui sont cependant limitées par trois angles plans égaux, et qui sont par conséquent composées de faces superposables, il n'y a qu'à les couper par une sphère ayant son centre à leur sommet commun. Chaque angle trièdre détachera sur la surface de la sphère un triangle composé de trois arcs égaux par couple à ceux du triangle correspondant ; mais ces triangles, quoique susceptibles d'être inscrits dans un cercle de même rayon tracé sur la sphère, seront dans le cas insuperposable ; puisque, d'une part, les sommets homologues ne tombent pas du même côté de l'arc qui leur est opposé, ce qui détruit la possibilité de superposition par glissement selon le plan du cercle dont ces arcs font partie, et que de l'autre, si on met ces mêmes arcs en superposition par duplication

de leur plan, l'un des sommets opposés tombe à droite tandis que son homologue tombe à gauche. Les pyramides trièdres ayant leurs faces sphériques homologues insuperposables seront donc insuperposables à leur tour. On peut toutefois démontrer rigoureusement l'équivalence des deux espaces cubes compris entre les trois plans et le triangle sphérique qu'ils interceptent, et en conclure par suite l'équivalence de l'espace infini que ces trois plans embrassent; puisque rien ne limite la grandeur du rayon sphérique appliqué à cette démonstration.

Lemme. Dans une sphère, si deux cercles se coupent suivant une corde quelconque et se meuvent sur la sphère sans que leur angle plan varie, et sans que la corde change de longueur, ils intercepteront constamment deux fuseaux qui seront égaux par couple, comme indirectement superposables aux deux fuseaux homologues qu'ils interceptaient dans leur position première. C'est-à-dire comme pouvant être substitués dans la même incrustation.

Reprenons maintenant la sphère précédente et supposons inscrites, dans celle-ci, deux sphères nouvelles qui passeraient chacune par le centre commun, et par les sommets du triangle que détermine dans la première un des angles trièdres pris séparément. Ces deux sphères seront égales entre elles; car les sommets des deux triangles sphériques qu'elles comprennent dans leur surface, correspondent de part et d'autre à un cercle de même rayon; il nous suffira donc de démontrer que pour arriver aux deux angles trièdres, les quantités à soustraire de ces deux espaces sphériques identiques sont égales par superposition.

Prenons pour cela deux faces homologues sur chaque angle trièdre, nous verrons que les deux plans de ces faces détachent de chaque sphère des calottes superposables, puisque ces faces correspondent à des triangles plans égaux et par conséquent à des cercles égaux

sur les deux sphères ; et comme chacune des calottes superposables présente à son tour, d'après le lemme précédent, trois fuseaux également superposables aux trois fuseaux de la face homologue, il est facile d'en conclure immédiatement par soustraction l'identité de ce qui reste de la calotte, après la suppression des trois fuseaux.

Le même raisonnement peut s'appliquer aux trois calottes que détachent les autres plans qui enveloppent le tétraèdre, il en résulte que ces deux tétraèdres sphériques sont égaux.

En considérant la portion d'espace comprise entre l'angle trièdre et le plan du cercle circonscrit au triangle sphérique, nous voyons que cet espace grandit ou diminue selon que le plan s'écarte ou se rapproche du sommet, et que c'est une espèce de grandeur dont les modifications présentent en quelque sorte les mêmes circonstances que celles de l'angle plan. Aussi, pour ramener cette grandeur cubique à une commune mesure, c'est au principe d'équivalence qu'on a également eu recours ; et de même que dans un but analogue, on a rapporté les surfaces planes au rectangle de base constante, on a également ramené la comparaison des mesures cubiques à celle du parallépipède rectangle à base constante, qui est le cube le plus simple parmi ceux qui sont susceptibles d'être mesurés linéairement, c'est-à-dire par superposition, et en donnant un reste superposable aux deux termes de la soustraction.

Le principe d'équivalence, dont l'application était si facile pour opérer la transformation des surfaces, présentait dans la symétrie de l'angle trièdre une difficulté de démonstration qui a quelque temps occupé les géomètres ; c'est pour cela que nous avons tenu à en donner une démonstration que nous regardons comme complète, puisqu'elle repose tout entière sur le principe d'égalité par superposition soustractive.

Les détails dans lesquels nous sommes entrés concer-

nant la mesure et la modification des surfaces nous dispenseront de nous étendre sur celles des solides : puisque nous avons donné le moyen de ramener le calcul des surfaces à des modifications linéaires, il s'ensuit que nous pourrons ramener celui des solides d'abord à des modifications de surfaces, et par suite à des modifications entièrement linéaires, et que par conséquent, tout problème cubique analogue à un de ceux que nous avons résolus pour une surface plane peut se traduire en ligne en adoptant le mode de réduction linéaire qui se trouve applicable aux cubes.

Quant au procédé général que nous avons donné pour évaluer les surfaces renfermées dans des périmètres courbes, il est également applicable à la mesure des cubes renfermés : 1° entre un plan et une surface ; 2° dans une surface entièrement fermée. Ces cubatures pourront toujours se décomposer en effet d'une manière analogue, et présenter une suite de prismes quadrangulaires à base arbitrairement choisie, dont le volume sera donné par la moyenne arithmétique des quatre arêtes multipliées par la superficie de la section de base, moyenne arithmétique qui peut, sans inconvénient, être remplacée à son tour par la hauteur de la cote moyenne de position, qui correspond à l'intersection des plans diagonaux du prisme ; et de plus, il est clair que l'on peut choisir les dimensions des prismes eux-mêmes de manière à ce que la base rectangulaire qu'ils interceptent soit constante, et donne, évaluée en surface, un multiple ou un sous-multiple de dix. Cette division une fois adoptée, l'emplacement des cotes moyennes correspondantes à chaque prisme se trouve à son tour déterminé, et il ne s'agit plus dès lors, pour avoir le cube cherché, que d'ajouter entre elles toutes ces cotes moyennes bout à bout et de faire subir au total la modification décimale qui correspond à la multiplication par la base commune. Nous allons entrer à ce sujet dans

des détails assez circonstanciés pour permettre de varier selon les circonstances ce mode approximatif de cubature qui correspond spécialement à la projection mixte.

Quand on se propose d'évaluer le cube d'un prisme quadrangulaire droit, tronqué dans sa partie supérieure a, b, c, d , par une surface courbe quelconque, on peut, comme première approximation, remplacer celle-ci par le quadrilatère gauche qui couronne le prisme et dont les côtés forment les cordes des arcs que chaque face plane détermine dans la surface :

Or, ce quadrilatère, selon qu'on adoptera comme réelle l'une ou l'autre de ses diagonales, ac et bd , donnera lieu à deux formes de couronnement différentes. Les formules arithmétiques de cubature seront dans un cas :

$$\omega \left(\frac{a' + c' + b'}{3} \right) + \omega' \left(\frac{a' + c' + d'}{3} \right), \text{ et dans l'autre :}$$

$$\alpha \left(\frac{b' + d' + a'}{3} \right) + \alpha' \left(\frac{b' + d' + c'}{3} \right).$$

$\omega + \omega' = \alpha + \alpha' = S$, exprimant la base totale du prisme, soit la somme des deux triangles qui forment la projection des faces dièdres dont se compose chaque couronnement partiel ; et $\frac{a' + b' + c'}{3}$, etc., donnant en fonction des ordon-

nées a', b', c' , etc., la hauteur de l'ordonnée de chacun des centres de gravité correspondants. Ces deux formules peuvent encore se transformer en $S \times o$ et $S \times o'$; o et o' étant les cotes moyennes de cubature des quatre triangles supérieurs pris deux à deux, cotes dont l'ordonnée commune, partant du centre de gravité de S , vient aboutir successivement à chacune des droites qui unissent les centres de gravité dans la partie supérieure, elle les y divise en parties réciproquement proportionnelles aux surfaces de projection ω, ω' et α, α' . On voit, d'après ces indications, que ces deux dernières formules sont susceptibles d'être résolues sans peine graphiquement.

On obtiendra une approximation plus grande, en adoptant, au lieu des deux précédentes, la formule qui correspond à $S \left(\frac{a' + b' + c' + d'}{4} \right)$; c'est-à-dire, la surface de base multipliée par la hauteur du centre de gravité e des quatre sommets du quadrilatère gauche. Il arrive que ce point e , donne exactement la moyenne de o et de o' , toutes les fois que dans le quadrilatère S , les diagonales se coupent à leur milieu respectif, c'est-à-dire, toutes les fois que S se trouve un parallélogramme.

Or, la droite qui joint les centres de deux côtés opposés du quadrilatère gauche passe également par le point e . Il s'ensuit que cette valeur $e' = \frac{a' + b' + c' + d'}{4}$ est encore très-

facile à construire, que par cette formule on multiplie réellement S par l'ordonnée centrale du paraboloïde hyperbolique qui passe par les quatre sommets des ordonnées a' , b' , c' , d' , et que cette cubature est rigoureuse, en ce sens que l'on substitue alors à la surface primitive une portion de surface réglée susceptible d'une cubature exacte; c'est ce que nous allons démontrer en peu de mots, en prouvant que la solidité d'un tétraèdre offre, par rapport aux paraboloïdes réglés qui le coupent diamétralement, une propriété analogue à celle que présente la surface d'un triangle et les trois paraboles qui sont séparément tangentes à ses côtés selon deux sommets différents.

Lemme. Le cube d'un tétraèdre est divisé en deux parties égales par chacun des trois paraboloïdes réglés que déterminent ses six arêtes, quand elles sont prises, quatre à quatre, de manière à former un quadrilatère gauche. Un quelconque de ces quadrilatères a pour diagonales les deux autres arêtes qui complètent la pyramide. En faisant la figure du tétraèdre, il suffirait d'y ponctuer ces dernières, pour que le quadrilatère choisi restât seul apparent. Remarquons, en outre, que ces deux dia-

gonales ne sauraient se rencontrer dans l'espace et doivent aboutir chacune à deux sommets différents.

Si l'on coupe le tétraèdre par un plan parallèle à la fois aux deux diagonales d'un même quadrilatère, on sait que l'intersection sera un parallélogramme : de plus, il est facile de reconnaître que les diagonales de ce parallélogramme constitueront séparément la génératrice mobile d'un parabolôïde qui aurait pour directrices deux des côtés opposés du quadrilatère gauche, et pour plan directeur la direction constante du plan sécant. Il s'ensuit qu'en faisant varier ce dernier, toujours parallèlement à lui-même, l'élément linéaire du parabolôïde divisera constamment en deux parties égales la surface de la section obtenue dans le tétraèdre, dont le volume pourra dès lors être considéré comme formé d'une suite d'éléments cubiques divisés chacun en deux parties égales, par leur rencontre avec le parabolôïde. Il s'ensuit encore, que les deux surfaces diamétrales qui ont même plan directeur diviseront la solidité de la pyramide en quatre parties égales, ayant leur centre de gravité commun sur la ligne qui joint le centre de deux arêtes opposées du tétraèdre, au point commun d'intersection des trois parabolôïdes diamétraux, point qui se confond en c avec le centre de gravité des quatre sommets.

Pour appliquer cette propriété du parabolôïde diamétral à la cubature d'un prisme quadrangulaire droit terminé par une surface courbe, on envisage le tétraèdre que déterminent les quatre sommets a, b, c, d , des arêtes du prisme comme la différence cubique des deux couples de prismes triangulaires tronqués que les quatre ordonnées permettent de substituer à la surface; et l'on prend la moyenne de cette différence, ce qui, d'après le lemme précédent, donne la cubature exacte du prisme tronqué par le parabolôïde diamétral, qui a pour éléments linéaires les quatre arêtes supérieures, et ce qui revient par con-

séquent à substituer la surface réglée à celle que l'on avait d'abord à considérer.

La formule arithmétique qui correspond à cette substitution s'obtiendra donc en moyennant les deux valeurs déjà trouvées, page 111; elles peuvent être mises sous la forme suivante, nous supprimons l'accentuation :

$$\frac{1}{3} \{ (\omega + \omega') (a + b + c + d) - \omega' b - \omega d \} (1)$$

$$\frac{1}{3} \{ (\alpha' + \alpha') (a + b + c + d) - \alpha' a - \alpha c \} (2)$$

Leur moyenne sera donnée par

$$\frac{(1)+(2)}{2} = \frac{1}{2.3} \{ 2S(a+b+c+d) - \omega' b - \omega d - \alpha' a - \alpha c \} . . (3)$$

$$= \frac{1}{2.3} \{ 2S(a+b+c+d) - S(b+d+a+c) + \omega b + \omega' d + \alpha a + \alpha' c \}$$

$$= \frac{1}{2.3} \{ S(a+b+c+d) + \omega b + \omega' d + \alpha a + \alpha' c \} . . . (4)$$

d'où

$$\frac{(3)+(4)}{2} = \frac{1}{4.3} \{ 3S(a+b+c+d) + (\omega - \omega') (b-d) + (\alpha - \alpha') (a-c) \}$$

$$= S \frac{(a+b+c+d)}{4} + \frac{(\omega - \omega') (b-d) + (\alpha - \alpha') (a-c)}{12} . . (5)$$

Formule rigoureuse dont le second terme peut être rendu nul de cinq manières différentes; ce qui prouve que, dans la plupart des cas, on pourra se contenter de la valeur du premier.

En posant $\omega = \alpha$ et $\omega' = \alpha'$, nous obtiendrons par (4) ou par (5), celle qui correspond à un prisme de base trapézoïdale; la base devient parallélogrammique, en posant en outre $\omega = \omega'$; cette supposition est une de celles qui rendent tout à fait nul le dernier terme de (5).

Pour passer à la cubature graphique correspondante à ces dernières formules, il suffira, par la même raison, de

prendre la moyenne des deux cotes o et o' dont nous avons indiqué les aboutissants et le point de départ commun, même page 111.

Si l'on veut tenir compte de la cote e' de la surface courbe primitive qui correspond au centre de gravité e indiqué ci-dessus, on obtiendra un nouveau degré d'approximation par un procédé analogue à celui que nous avons appliqué aux superficies planes. Supposons le prisme $abcd$ divisé en cinq autres de base équivalente, et donnons une hauteur constante e' au prisme central, en leur appliquant le premier terme de (5), la formule de cubature sera

$$\frac{2(a+b+c+d)+12e'}{4 \times 5} = x; \quad x \text{ donnant la hauteur moyenne du prisme total à cuber. Elle se traduit}$$

en formule graphique par les transformations suivantes :

$$5x = 3e' + 2 \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right) = 3e' + 2(e' \pm f) = 5e' \pm 2f,$$

d'où $x = e' \pm \frac{2f}{5}$. Par f nous exprimons ici la flèche qui existe de e en e' entre le paraboloïde et la surface courbe qui termine le prisme à cuber. Cette flèche devant être prise avec le signe plus, quand le paraboloïde se trouve en dessus, et avec le signe moins, dans le cas contraire.

Si le quadrilatère se réduisait à un triangle abc , la surface réglée deviendrait plane; la cote moyenne e' serait celle qui correspond au centre de gravité e des trois sommets abc et de la surface abc ; la cote de e deviendrait :

$$e = \frac{a+b+c}{3} = e' \pm f, \text{ et la formule se présenterait alors sous la forme } x = \frac{3(a+b+c)+12e'}{3 \times 7}; \text{ et se}$$

$$\text{transformerait en : } 7x = 4e' + \frac{3(a+b+c)}{3} = 4e' + 3(e' \pm f)$$

$$= 7e' \pm 3f; \text{ d'où } x = e' \pm \frac{3f}{7}. f \text{ exprimant encore la flèche}$$

comprise entre le plan du triangle abc et la surface qui termine le prisme que l'on avait à cuber.

Ces deux nouvelles formules approximatives se réduisent à substituer à la surface primitive, dans l'une, un polyèdre à cinq faces paraboloides, dont les projections sont équivalentes, *fig. 7*; et dans l'autre, un polyèdre à sept faces triangulaires parcelllement équivalentes en projection.

Pour obtenir cette subdivision d'un triangle en sept autres équivalents, menez dans le triangle donné, Pl. III, *fig. 8*, les deux parallèles cg et fd à la distance de ab et bd capable du septième de la surface; prenez de g en c' une distance égale à gf ; joignez les sommets a et b au point c' ; doublez bc' , de c' en c'' ; et, enfin joignez ce dernier aux deux sommets a et d et au point c . Les deux triangles acb et $bd'd$ seront égaux au septième par construction; il en sera de même de leurs équivalents bcc' , $dc'c''$, acc'' , $cc'c''$, et, par conséquent, du dernier $ac''d$ qui se trouve le reste de la soustraction des six autres.

Ces diverses méthodes de cubature acquièrent une importance réelle quand on les rattache au système de projection orthogonale mixte ou chiffré. Nous avons déjà signalé le principal avantage que présentent les épures de ce système, qui permettent d'obtenir immédiatement des sections horizontales équidistantes sur toute l'étendue des corps soumis à ce genre de description; et comme ces courbes sont cotées, par rapport à un même plan horizontal, il en résulte qu'il suffit de supposer un quelconque de ces corps divisé en prismes verticaux, pour être à même de trouver instantanément, sur la figure, la cote relative aux arêtes de ces prismes, et, par conséquent, pour obtenir presque sans efforts, au moyen des formules précédentes, la valeur d'un cube partiel quelconque terminé par des plans verticaux.

Ce mode expéditif, appliqué aux grandes excavations,

permet de les évaluer, pour ainsi dire, à vue d'œil, pourvu que dans la division en prisme on ait soin de choisir exclusivement des bases dont la surface puisse se trouver exprimée par des nombres très-simples : ce qu'il est toujours loisible de faire avec un peu d'attention; alors, soit qu'on adopte pour multiplicateur variable la cote moyenne elle-même ou celle qui se déduit arithmétiquement ou graphiquement des arêtes extrêmes de chaque prisme, il est facile de voir que les cubatures des masses les plus importantes pourront s'exécuter, pour ainsi dire, en quelques minutes.

De pareils résultats pratiques ne sont pas à dédaigner : il importe presque toujours de réduire les cubes des travaux à des minima ; et, comme ce n'est qu'en variant les données d'un projet et en calculant séparément les divers cubes qu'exige chaque modification partielle, qu'on peut arriver par comparaison au projet qui donnera lieu à la moindre dépense possible, il est très-essentiel que l'ingénieur ne soit pas rebuté dans l'accomplissement de ce devoir par la longueur des opérations à exécuter. La célérité que procure une bonne méthode d'évaluation est donc tout à la fois un moyen de perfectionnement dans le choix et la disposition des travaux, et un gage d'économie sous le rapport de l'importance des sommes qu'il y aura lieu de consacrer à leur exécution.

TROISIÈME PARTIE.

INTERPOLATION GRAPHIQUE.

Les phénomènes physiques qui ont lieu autour de nous, tant ceux auxquels nous restons indifférents, que ceux que nous avons le plus d'intérêt à étudier, sont des effets qui ont pour cause les forces de la nature; effets qui se manifestent à nous par le mouvement, ou du moins, que nous pouvons toujours ramener à une question de mouvement; car, une des conséquences les plus immédiates de la traduction de toute espèce de grandeurs en groupes d'unités linéaires, est de ramener à des modifications de lignes; et par conséquent, d'exprimer par des mouvements de points, les modifications des grandeurs primitives.

Quand les causes ou forces qui agissent sur un point peuvent se réduire à une seule, le mouvement produit a lieu en ligne droite; il s'exécute, comme on sait, suivant une ligne courbe quand l'une d'entre elles se trouve tout à la fois variable d'intensité et diverse de direction.

Il peut arriver que nous connaissions d'avance les diverses causes du mouvement que nous avons à étudier; et, dès lors, il devient possible de prévoir et de déterminer, *à priori*, toutes les circonstances de la courbe qui doit en résulter. Les prédictions astronomiques offrent un des exemples les plus remarquables de l'exactitude à laquelle l'homme peut atteindre dans les recherches de ce genre. D'autres fois, le mouvement se produit spontanément à nos yeux; et en remontant de l'effet à la cause, nous avons à chercher, par la nature même de la courbe décrite, quelles sont les lois qui ont présidé à sa

formation. Enfin, le mouvement peut fort bien ne nous être connu que dans des intervalles limités, et qui se rapportent à des circonstances particulières du parcours ; nous sommes alors réduits à chercher une loi approximative qui satisfasse le mieux possible aux données qui nous sont connues, afin de pouvoir l'appliquer, par extension, aux parties de la courbe que l'imperfection de nos moyens d'investigation ne nous permet pas d'apprécier avec exactitude, et d'en compléter ainsi la description par un procédé approximatif. Les diverses méthodes de calcul qui résolvent ce dernier problème ont reçu le nom d'interpolation. Nous allons décrire et expliquer celles qui dépendent du calcul graphique.

Pour ramener à une question de mouvement, et, par conséquent, à une construction graphique, tout problème qui embrasse les modifications d'une grandeur quelconque, il convient presque toujours de prendre pour abscisses une des causes agissantes, exprimée en grandeur linéaire, et pour ordonnée l'effet produit correspondant à chaque modification partielle de l'abscisse (ce que l'on désigne, dans d'autres circonstances, par les noms d'argument et de fonction). Il en résulte une série de points successifs qu'il faut lier par une courbe, au moyen de laquelle on peut apprécier les modifications diverses, dont le problème se trouve susceptible.

Quand, pour étudier un phénomène, et pouvoir le traduire en courbe, on n'a, comme dans la supposition précédente, à sa disposition que des points isolés (et nous verrons plus tard que la connaissance anticipée d'une portion de la courbe se réduit à fournir une succession de points isolés, ou du moins que l'on doit appliquer comme tels à la recherche du tracé qui en complètera la description), le problème d'interpolation, envisagé graphiquement, consiste à faire passer par tous ces points soit une courbe unique, quand la chose est exécutable,

soit une succession d'arcs de courbe d'une même nature, et disposés entre eux, de manière à satisfaire le mieux possible à la loi de continuité, qui est la condition générale de tout mouvement régulier. Nous allons étudier ces deux procédés séparément.

INTERPOLATION PAR UNE COURBE UNIQUE.

Les problèmes graphiques qui dépendent de cette catégorie se réduisent à la description des courbes du second degré. Au delà de cinq points, il convient de renoncer à interpoler par une seule courbe, vu que la question ainsi posée devient nécessairement d'autant plus difficile à résoudre, qu'elle présente un plus grand nombre de conditions à remplir.

Mais, avant d'en aborder directement la solution, il est indispensable de rappeler ici les principes sur lesquels nous allons nous appuyer. Ces principes nous les choisirons tellement généraux, et tout à la fois tellement coordonnés entre eux, qu'il soit toujours possible de retrouver, au besoin, la série des constructions qui en seront la conséquence, sans être tenu de charger sa mémoire des détails linéaires qui constituent le matériel de chaque tracé.

Nous allons, pour cela, faire dépendre ces diverses constructions d'une idée simple et fondamentale : nous supposerons que toutes les courbes à décrire font partie d'une surface réglée du second ordre, que nous choisirons dans chaque cas particulier, de manière à remplir les conditions du problème proposé : ramenant ainsi à de véritables épreuves les figures planes du problème primitif. Nous aurons donc à rappeler aussi, avant d'entrer en matière, les différentes formes que peuvent affecter les projections de ces surfaces, puisque c'est nécessairement par la projection que nous arriverons à ramener sur un plan les éléments de génération qui les constituent.

Le genre de projection qui se prête le mieux au but

que nous venons d'indiquer, est la projection polaire à trois dimensions : vu que, dans ce système, une seule projection ou perspective suffit pour décrire l'espace. Nous allons donc énoncer, en peu de mots, les principales données sur lesquelles reposent les épures élémentaires qui en dérivent ; renvoyant, pour des détails plus circonstanciés, au traité spécial que nous avons déjà publié sur la matière en 1828.

1° Le système de projection polaire consiste à rapporter tous les points de l'espace à un même plan fixe, nommé tableau, par des droites qui se dirigent vers l'œil, point invariablement coordonné avec le plan du tableau.

2° La projection polaire d'un plan est donnée par sa trace et sa limite ; savoir : son intersection avec le tableau, et celle d'un plan parallèle passant par l'œil. Ces deux lignes sont, par conséquent, *toujours parallèles*. En exécutant l'épure on punctue la limite, la trace seule est figurée par une ligne pleine.

3° Une droite étant l'intersection de deux plans, a nécessairement pour projection une autre droite, ayant sa trace au point d'intersection des traces de ceux-ci, et sa limite à l'intersection de leurs limites. Il suffit pour que ces deux points, qui limitent la perspective d'une droite, deviennent distincts sur le tableau, de figurer à la place qui leur correspond un petit arrachement de la trace et de la limite d'un plan, soit un trait plein et un trait punctué.

4° Deux droites quelconques se coupent, quand elles déterminent, par leurs traces, une parallèle à la ligne qui joint leurs limites. Ce couple de parallèles appartient aux lignes projectives du plan qui les contient toutes deux. Réciproquement, pour que deux droites puissent se couper, il faut qu'elles déterminent, etc.

5° Quand $\left\{ \begin{array}{l} \text{un plan} \\ \text{une droite} \end{array} \right\}$ passe par l'œil, la trace et

la limite se superposent : la projection $\left\{ \begin{array}{l} \text{du plan} \\ \text{de la droite} \end{array} \right\}$
se réduit alors $\left\{ \begin{array}{l} \text{à une ligne unique} \\ \text{à un point} \end{array} \right\}$.

6° $\left\{ \begin{array}{l} \text{Deux plans} \\ \text{Deux droites} \end{array} \right\}$ ayant même limite sont parallèles.

Si deux $\left\{ \begin{array}{l} \text{droites} \\ \text{plans} \\ \text{surfaces} \end{array} \right\}$ sont tels que les traces de l'un se superposent aux limites de l'autre, ils sont dits invertis.

7° Un hyperboloïde réglé a pour trace le lieu des traces de ses génératrices, et pour limite le lieu de leurs limites. Ces deux courbes, toujours semblables et semblablement placées, peuvent affecter toutes les formes que comportent les lignes du second degré;

8° Le parabolôïde réglé n'étant qu'un cas particulier de l'hyperboloïde, présente les mêmes particularités dans sa projection, excepté qu'il ne peut avoir une ellipse pour trace, et qu'il a constamment deux droites pour limites : soit les limites de ses deux plans directeurs. De plus, sa trace est une parabole, quand ses limites sont parallèles sur le tableau.

Quand une de ses limites passe à l'infini, le tableau est alors, lui-même, un des plans directeurs de la surface. Dans ce cas particulier, la trace et la limite se réduisent chacune à une seule droite; et le contour apparent se projette suivant une parabole.

9° Le contour apparent d'une surface réglée est, sur le tableau, la courbe enveloppe, déterminée par la succession des perspectives de ses génératrices.

Dans le texte, nous observerons de toujours placer les limites à la suite (à la droite) des traces qui leur correspondent : nous écrirons le plan $\left\{ \begin{array}{l} ab \cdot cd \\ cd \cdot ab \end{array} \right\}$, la ligne $\left\{ \begin{array}{l} a \cdot b \\ b \cdot a \end{array} \right\}$, selon les deux permutations que les mêmes lettres com-

portent, et qui s'appliquent à deux $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{plans} \\ \text{droites} \end{smallmatrix} \right\}$ invertis, l'astérisque sera adopté, comme signe de position relative, ainsi la droite $\left\{ \begin{smallmatrix} ab * \\ . ab \end{smallmatrix} \right\}$ nous indiquera une $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{trace} \\ \text{limite} \end{smallmatrix} \right\}$ isolée; et il en sera de même du point $\left\{ \begin{smallmatrix} b * \\ . b \end{smallmatrix} \right\}$. Il en résulte encore que pour indiquer une droite ou un plan qui passent par l'œil, il suffira de les désigner par les mêmes lettres deux fois répétées et séparées par l'astérisque $\left\{ \begin{smallmatrix} ab * ab \\ a * a \end{smallmatrix} \right\}$.

La présence seule de l'astérisque annoncera donc au lecteur que les lignes dont il a à s'occuper constituent une épure polaire, tout en lui fournissant le moyen d'en distinguer les éléments; et son absence indiquera qu'il n'a plus à considérer que la figure plane qui se confond sur le tableau avec les lignes projectives de cette même épure.

Les épures de perspective ordinaire, telles que nous venons de les décrire, peuvent encore être envisagées comme le résultat d'un système projectif qui complète la description des lignes et des surfaces, au moyen d'une double intersection plane opérée d'une part sur le tableau, et de l'autre sur un plan parallèle, situé tout entier à l'infini; l'une contenant ce que nous avons appelé les lignes et les points traces, l'autre les lignes et les points limites.

Sous ce dernier rapport, le système polaire est susceptible d'une extension remarquable et qui se prête à de nombreuses applications. On peut admettre, en effet, que les deux plans sécants, cessant d'être parallèles, se rencontrent suivant une ligne arbitraire qui, une fois tracée sur le tableau, forme l'arête de l'angle dièdre sur la face antérieure duquel on suppose encore

toute la projection ramenée. Cette^e ligne a déjà reçu dans plusieurs traités le nom de *sécante commune*, et quoiqu'il lui ait été donné dans des circonstances assez restreintes, c'est celui que nous adopterons de préférence pour elle, en le généralisant; tandis que nous désignerons cette modification du système projectif sous celui de *projection polaire dièdre*.

La seule différence réelle que présentent les deux projections vient, comme on voit, de ce que dans les épures de perspective ordinaire la *sécante commune* est passée à l'infini, ce qui dispense d'en tenir compte autrement que par le parallélisme des lignes qui vont y concourir. La perspective usuelle constituerait donc, en réalité, un cas particulier du système dièdre, envisagé lui-même comme procédé général de projection.

Il s'ensuit encore que, dans ce système général, les deux traces d'un plan (car ici le terme de limite cesse d'être applicable), au lieu de se trouver parallèles, viennent nécessairement se couper en un même point de la *sécante commune*; et c'est là l'unique modification dont on ait réellement à tenir compte en passant d'un système à l'autre; car, dans les deux, une ligne se trouve également déterminée par la projection de sa partie comprise entre les deux points où elle perce chacun des plans de l'angle sécant.

Moyennant ces remarques, il est clair qu'on peut exécuter les deux sortes de dessins qui en résultent, par des procédés identiques, et traduire, en conséquence, dans le système dièdre toutes les épures du système polaire régulier; celles, du moins, dans lesquelles il n'y a point à s'occuper de relations métriques, et qui se réduisent alors à de simples intersections de lignes et de surfaces; et, de plus, il est aisé de reconnaître que, parmi ces dernières, toutes celles qui se borneront à des intersections linéaires ou planes, se trouveront matériellement

ramenées à des intersections de lignes droites non parallèles, situées sur le tableau; et que, par conséquent, la règle seule suffira pour exécuter les figures planes qui en résulteront.

A l'appui de cette remarque, nous aurons occasion de montrer plus d'une fois, dans cette troisième partie, que les solutions les plus élégantes qui se rapportent à la géométrie de la règle, ne sont autre chose que des épures polaires dièdres.

Nous sommes maintenant à même de faire connaître le principal motif qui nous a porté à ramener la solution des divers problèmes d'interpolation à des épures de surfaces gauches, transformation qui semble devoir plutôt compliquer la question que la simplifier, et qui, par là même, doit répugner au premier aperçu.

Mais à l'usage on s'apercevra bientôt de son importance: car, du moment où le tracé d'une figure plane sera susceptible de représenter en projection polaire une surface réglée du second degré, on sera conduit à une solution purement linéaire du problème proposé; c'est-à-dire qu'on pourra exécuter le tracé, en n'y employant qu'une règle sur le papier, et que des jalons sur le terrain; et cette circonstance favorable se présentera nécessairement toutes les fois que la partie du problème qui se rapporte à la surface auxiliaire pourra se résoudre par des intersections de plans et de lignes. Ces solutions partielles n'exigent, en effet, comme nous venons de le voir dans l'exposé du système de projection rappelé ci-dessus, que le tracé d'un certain nombre de couples de parallèles, couples qui pourront au besoin, par le seul changement de projection dièdre, se trouver remplacés eux-mêmes par des droites allant concourir deux à deux sur une même ligne, constituant alors la sécante commune de l'angle plan sur lequel l'opération est censée s'exécuter.

Les problèmes d'interpolation qui rentrent plus parti-

culièrement dans la catégorie que nous venons d'indiquer, sont les suivants : étant donnés $\left\{ \begin{array}{l} 5, 4, 3, 2, 1, 0 \text{ points} \\ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ tangentes} \end{array} \right\}$, construire la courbe que cinq de ces éléments déterminent. Il faut observer que nous supposerons toujours dans ces combinaisons de données, que les points sont situés sur les tangentes, et constituent le lieu de contact de celles-ci ; nous n'admettrons pas de points isolés, combinés avec des tangentes dont le contact resterait indéterminé ; suppositions qui exigent en général l'emploi d'un cercle auxiliaire, si l'on veut parvenir à résoudre les problèmes qui les concernent. Nous en indiquerons, toutefois, quelques exemples pour développer le principe qui s'applique à leur solution ; il consiste à remplacer la surface gauche sur laquelle on rapporte la courbe par un cône à base circulaire.

Nous exposerons, en outre, une autre espèce d'interpolation dans laquelle la nature de la courbe à décrire entre comme donnée première du problème, et tient lieu d'un des cinq éléments indiqués ci-dessus. Ces problèmes sont les suivants : étant donnés $\left\{ \begin{array}{l} 4, 3, 2, 1, 0 \text{ points} \\ 0, 1, 2, 3, 4 \text{ tangentes} \end{array} \right\}$, construire $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'hyperbole} \\ \text{l'ellipse ou la parabole} \end{array} \right\}$ que ces éléments déterminent. Ces divers cas résolus, on en conclura sans peine les tracés nécessairement indéterminés correspondant à un nombre de données moindre ; étant donnés, par exemple, $\left\{ \begin{array}{l} 3, 2, 1, 0 \text{ points} \\ 0, 1, 2, 3 \text{ tangentes} \end{array} \right\}$, construire à volonté une des trois courbes du second ordre. Outre que ces derniers comportent, en général, des constructions très-simples, ils sont toujours susceptibles d'une solution réelle ; tandis que les précédents admettent de nombreuses exceptions. Ainsi, par quatre points donnés, on peut bien faire passer une hyperbole, mais pas toujours une ellipse, et encore

moins une parabole. L'ellipse est possible tant que le quadrilatère inscrit, qui résulte des données, conserve la forme convexe ; ce qui exige que les points de concours de ses côtés opposés soient situés hors de son périmètre. Tous les cas de quatre points qui admettent des ellipses donnent lieu à deux paraboles. Toutefois une seule parabole est possible, quand le quadrilatère elliptique devient trapèze ; et enfin, si le trapèze devient parallélogramme, la forme parabolique se trouve inapplicable, quoique la forme elliptique le soit encore dans toute sa généralité.

Quatre tangentes admettent indifféremment les trois courbes, avec cette différence, qu'elles correspondent toujours à une parabole unique, qui devient encore impossible aussitôt que deux des tangentes se trouvent parallèles.

Enfin, deux tangentes à contact déterminé présentent et les mêmes généralités et la même exception. Nous ne pousserons pas plus loin cette analyse que chacun peut étendre à volonté, en ramenant les données diverses qu'il aura à discuter à la forme du quadrilatère inscrit, ou à celle du quadrilatère circonscrit à la courbe.

Nous avons à remarquer encore que, dans ces divers problèmes, les uns, ceux où le nombre des points excédera celui des tangentes, exigeront que l'on fasse usage de l'hyperboloïde réglé pour les résoudre ; tandis que les autres permettront l'emploi du paraboloïde, et seront par conséquent susceptible de plus de simplicité dans leurs tracés.

Premier problème. Étant donnés, Pl. III, fig. 9, les cinq points 1, 2, 3, 4, 5, tracer la courbe qu'ils déterminent.

Nous supposerons que ces cinq points sont la trace sur le tableau d'autant de génératrices d'une même surface gauche du deuxième ordre ; et que ces lignes correspondent à un système de génération différent, suivant qu'elles dérivent d'un chiffre pair ou impair. Ces préli-

minaires admis, nous pourrions assujettir les droites (1) et (2), qui doivent se rencontrer, à passer par l'œil : leur projection se trouvera réduite, en conséquence, aux deux points 1 et 2 ; et, de plus, les projections de toutes les autres droites devront alors, celles à chiffres pairs passer par 1, et celles à chiffres impairs, par 2. Nous pouvons encore admettre que (5) se trouve parallèle à (2), ce qui exige que (5) se projette tout entière suivant la direction 5, 2 et ce qu'on indique en la notant $5 \cdot 2$. (4) sera projetée suivant la direction 4, 1 ; et comme elle doit rencontrer (5), il faudra que leurs limites se trouvent sur une parallèle $2c$, à la direction 5, 4 donnée par leurs traces. (3) devra, comme (5), passer par 2 et couper (4). La première condition fait connaître sa direction, et la seconde sa limite ; car, les limites de (3) et de (4) doivent déterminer, à leur tour, une parallèle cd à la ligne 3, 4 qui joint leurs traces ; voilà donc la perspective des cinq génératrices complète, savoir : $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot d$, $4 \cdot c$ et $5 \cdot 2$, et combinées de façon que $2 \cdot 2$ et $4 \cdot c$ s'appuyent chacune sur les trois autres. Donc, enfin, une génératrice quelconque (6), s'appuyant à son tour sur les mêmes directrices, donnera par sa trace un sixième point de la courbe cherchée, puisqu'elle appartiendra à la même surface de laquelle dépendent les cinq autres. Pour obtenir un sixième point, il suffit de mener par $5 \cdot 2$ un plan $5r \cdot 2d$ parallèle à $3 \cdot d$; et la droite $6 \cdot d$ sera, dans ce plan, une génératrice paire de la surface.

On pourra se donner, à volonté, la direction d'une génératrice nouvelle (8), en menant par un point quelconque n de (5) une droite indéfinie, passant par 1 ; il n'y aura qu'à choisir sa perspective, de façon qu'elle puisse s'appuyer sur (3), au point o où la droite indéfinie, suivant laquelle (8) se projette, coupe cette directrice.

Menons, par le point n , de n en d , une parallèle à $3 \cdot d$, cette parallèle, coupant (5), se trouvera dans un plan, dont

la limite 2, d est connue, et dont la trace 5, r le sera par conséquent ; mais cette parallèle, dont la trace est en r sur celle du plan qui la contient, détermine, avec $3 \cdot d$, un nouveau plan dont la trace 3, r est dès lors connue. Ce plan, passant par (3) et par le point n , contient nécessairement la génératrice (8) ; donc sa trace 3, r contiendra celle de cette génératrice, que nous trouverons au point 8 ; et ce dernier sera un sixième point de la courbe qui passe par les cinq autres.

On peut remarquer, au sujet de la solution précédente, qu'elle offre la forme la plus convenable à ce genre de problème : l'interpolation se bornant, en définitive, à fournir de nouveaux points qui appartiennent à la courbe cherchée, et à réduire par là, de plus en plus, les intervalles vides qui existaient entre les points primitivement donnés, il s'ensuit que la direction dans laquelle les nouveaux points doivent se trouver, est presque toujours une circonstance importante à connaître d'avance. Or, par la forme même du tracé qui nous occupe, on voit sans peine que les nouveaux points obtenus peuvent être considérés comme procédant polairement d'une même origine 1 ; ils se trouvent chacun sur un rayon vecteur passant par ce point, et dont on est maître de déterminer à volonté la direction, ce qui laisse libre de multiplier les points de la courbe dans l'endroit même où le besoin s'en fait plus spécialement sentir.

Le problème ainsi résolu pourrait convenir à un nouvel énoncé ; savoir : étant donnés, cinq points et une droite quelconque *on* passant par l'un d'eux, trouver le lieu de la seconde intersection de cette droite avec la courbe que les cinq points déterminent. On ramènera cet énoncé à la solution précédente, en affectant du n° 1 le point d'intersection connu ; et en regardant la droite donnée, comme la direction de la génératrice (8) dont on a à chercher la trace, quand on est une fois par-

venu à compléter la perspective des cinq premiers éléments de la surface.

Puisque nous sommes maître de choisir à volonté la direction de toutes les génératrices nouvelles du système pair, supposons que nous voulons connaître celle qui a la même trace que (3) : sa direction, comme paire, sera 3, 1 ; et sa limite b sera sur la parallèle à 5, 3 menée par le point 2 ; et enfin, 3, a sera la trace du plan qui contient 3, d et 3, b . Mais, comme ces deux droites se coupent au point 3, le plan qui les contient s'y trouve tangent à la surface gauche ; et la trace de ce plan étant l'intersection du plan sécant (du tableau) et du plan tangent, est nécessairement tangente en ce point 3, à la courbe que le tableau détermine sur la surface, celle-là même que nous construisons par points. Cette considération va nous servir à ramener immédiatement les données des deux problèmes suivants à celles du cas particulier que nous venons de résoudre, ce qui nous dispensera de les traiter avec autant de détails.

Étant donnés Pl. III, *fig.* 10, quatre points 1, 2, 3, 5, et la tangente (3, 4) suivant le point 3, construire la courbe.

Les points 1 et 2 conserveront la même signification que dans le problème précédent ; et, d'après la dernière remarque nous pourrions considérer le point 3 comme contenant la double trace de (3) et d'une génératrice paire (4), tandis que la tangente en ce point sera la trace du plan qui contient à la fois ces deux droites. Puisqu'elles sont de système différent, (3) doit passer par 2, et (4) par 1 ; une parallèle quelconque ab , à la trace de leur plan contiendra leurs limites, que nous pouvons, sauf cette obligation, choisir à volonté. (5) doit passer par 2, et s'appuyer sur (4) ; elle est donc déterminée aussitôt que (4) est connue ; et le deuxième problème se trouvant ainsi ramené aux cinq éléments qui

constituent le premier, le reste de la solution lui est nécessairement applicable.

Étant donnés, *fig. 11*, trois points 1, 2, 5 et les deux tangentes 1, *a* et 2, *b* suivant les deux premiers, construire la courbe.

Conservons encore à 1 et 2 leur signification précédente, et remarquons que nous connaissons ici la trace de deux plans tangents à la surface; ces plans, qui contiennent séparément 1 * 1 et 2 . 2 passent tous deux par l'œil; il s'ensuit qu'ils contiennent et projettent tout à la fois, chacun séparément, une seconde génératrice (3) et (4), dont la trace se trouve au point de contact de chaque plan; c'est-à-dire, 3 * en 2, et 4 * en 1. Nous pourrions donc déterminer à volonté les limites de ces deux génératrices sur la direction de leurs plans projetants, à la seule condition de placer ces limites sur une même parallèle *ab*, à la ligne 1, 2, qui joint les deux traces. Cela fait, si nous déterminons encore (5), comme nous venons de le faire dans les deux problèmes précédents, nous aurons rétabli nos deux génératrices paires et nos trois directrices impaires, et reconstitué, par conséquent, la surface au moyen de laquelle notre problème peut se trouver linéairement résolu.

Nous venons d'exposer, en quelque sorte, la méthode générale d'interpolation, celle dont on peut, à la rigueur, se dispenser de garder les détails dans sa mémoire; car la solution graphique se réduisant ici à la simple exécution d'une épure polaire, doit être envisagée comme produisant une figure dont les lignes ont, soit entre elles, soit avec les points donnés, des relations presque toutes forcées; mais en l'état, elle est peut-être encore trop compliquée.

Pour justifier ce que nous avons fait pressentir, quand nous avons parlé de la simplicité des résultats auxquels

nous allions être conduits, il va nous suffire d'y introduire la modification dièdre.

Reprenons, Pl. III, *fig.* 12, les cinq points primitivement donnés, et admettons encore que les génératrices (1) et (2) passent par l'œil : pour que les génératrices (4) et (5) se rencontrent dans l'espace, il suffira qu'elles viennent respectivement couper (1) et (2) en deux points $\cdot 1$ et $\cdot 2$ tels que la ligne $\cdot 1, 2$ qu'ils déterminent ait sa trace en $a \cdot$ sur celle du plan qui doit contenir à la fois (4) et (5) ; pour que (3) et (4) se rencontrent à leur tour, il faudra, par la même raison, que la ligne $\cdot 1, n$ de direction arbitraire autour du point $\cdot 1$, et sur laquelle on peut supposer que (3) s'appuie, vienne percer le tableau au point $b \cdot$, où sa propre direction coupe la trace supérieure du plan commun à (4) et à (3) ; de telle sorte, que $ba \cdot$ sera nécessairement la trace du plan qui passe par les trois sommets du triangle $\cdot 1, \cdot 2, \cdot n$, trace que nous pouvons, dès lors, adopter pour sécante commune dans la figure.

Ces données admises, si par la ligne $\cdot 2, n$ et par le point $5 \cdot$, nous menons un plan, sa trace supérieure contiendra $5 \cdot$ et viendra couper la sécante commune ba au point c où sa trace inférieure $\cdot 2, 3$ vient concourir ; enfin, si dans ce plan, nous considérons la ligne qui joint le point $6 \cdot$ au point $\cdot n$, il sera facile d'y reconnaître une troisième génératrice du système pair, car elle passe par $1 \cdot 1$; elle est dans un même plan que $5 \cdot 2$, et elle rencontre $3 \cdot n$ par construction ; sa trace $6 \cdot$ constituera donc un sixième point de la courbe cherchée.

On arrive ainsi par un procédé tout à fait direct à la propriété que Pascal a le premier signalée dans l'hexagone inscrit aux courbes du second degré ; et cela, sans avoir à s'occuper de la nature de la courbe donnée, et sans avoir une seule ligne étrangère à tracer dans cette figure, l'une des plus remarquables parmi celles qui constituent la géométrie de la règle. On y arrive, disons-nous,

forcément, et par ce seul fait, que les lignes qui la composent constituent l'épure polaire dièdre de l'intersection d'un plan et d'une surface réglée, du second ordre. Plus tard, nous aurons à indiquer comment on se trouve conduit, par des considérations du même genre, à la propriété des hexagones circonscrits.

Si l'on voulait déterminer, dans cette figure, les intersections ternaires des six plans invertis qui ont sur la sécante leur origine en a , b et c , on trouverait trois points où viendraient concourir trois à trois les diagonales des divers hexagones que les trois angles forment sur le tableau.

Profitons, dans cette même figure, de la direction arbitraire que l'on peut donner à la ligne $1, n$, autour du point 1 , et supposons qu'elle vient passer par le point 5 . Cette modification dans les données, porte le point en n' et modifie autour du point a , la direction $a b'$ de la sécante commune. Mais il arrive, par suite de ce changement, que la trace du nouveau plan $c', 5$ qui passe par 5 , se trouve tangente à la courbe cherchée, parce que ce plan lui-même est alors tangente à la surface au même point 5 où viennent se couper les deux génératrices de système différent $5 \cdot 2$ et $5 \cdot n'$ qu'il y détermine; et c'est encore là une conséquence du théorème de Pascal, qui se déduit de l'espace avec la même simplicité.

Par le fait de l'intersection des trois plans dont l'origine est en b , a et c sur la sécante commune, et dont les traces pleines appartiennent ici à la face supérieure du dièdre, il est également possible de trouver soit un nouveau point de la courbe, soit une de ses tangentes. Car, ces plans ayant pour intersections linéaires communes les génératrices (5) et (4), et la trace inférieure $1, n$ du plan b étant toujours prise à volonté, cette trace vient rencontrer son homologue $2, 3$ dans le plan c , en un point n qui appartient à la troisième intersection, ligne qui se trouve

par là entièrement déterminée, puisqu'elle doit venir passer par le point o où se rencontrent les deux premières; en la prolongeant, elle viendra couper la trace supérieure du plan b en un point e , qui appartient au sixième côté de l'hexagone. Cette construction exige sept lignes droites, comme la précédente, et quand il s'agit d'une courbe fermée, elle est toujours d'une étendue assez restreinte.

On remarquera encore combien les signes conventionnels introduits dans cette figure rendent son exécution facile. Qu'on oublie, par exemple, de bien y particulariser les traces supérieures et inférieures de chaque plan, et, au lieu d'une simple intersection ternaire, on sera exposé à en trouver trois; car il existe deux intersections du même genre, qui complètent la rencontre des six plans invertis a , b et c que ces mêmes lignes projettent.

En complétant les éléments de cet hyperboloïde, par rapport à une sécante invariable, sa trace inférieure et sa trace supérieure constitueraient deux courbes, dont la sécante commune (dans le sens adopté jusqu'à ce jour), serait celle des plans de projection. Les dépendances réciproques qui naissent de cette relation mettent bientôt à même de comprendre toute l'importance du rôle que jouent les sécantes communes, tant par rapport aux polygones linéaires que par rapport aux courbes du second degré. Ces dernières n'admettant de sécante commune que lorsqu'elles peuvent être envisagées comme faisant partie d'une même surface du second ordre, et comme constituant sur celle-ci la double trace d'une même épure dièdre, il s'ensuit que, dans cette position spéciale, elles sont aussi toujours susceptibles de se trouver placées à la fois sur deux cônes; et c'est en exécutant alors l'épure, au moyen de laquelle on obtient le sommet de ces cônes, que l'on parvient à trouver, sur le tableau, les deux points d'où l'on peut mener à la fois deux tangentes communes aux deux courbes données,

ce qui revient à trouver en projection les deux sommets coniques et le double contour apparent linéaire correspondant à chacune de ces deux surfaces.

Cette traduction d'une figure plane en épure offre un précieux avantage qu'il ne faut jamais perdre de vue : chaque ligne y prend un caractère particulier ; et cela contribue tout à la fois à faciliter l'intelligence du dessin et à garantir son exactitude. Car, ce caractère est presque toujours tellement tranché qu'une erreur de détermination y sauterait infailliblement aux yeux les moins exercés, pourvu qu'on ait eu soin d'en tenir compte en exécutant la figure.

Ainsi deux courbes du second degré admettent, en général, quatre tangentes communes, qui se coupent en six points ; et, cependant, il n'y a presque toujours que deux de ces points dont on puisse profiter pour trouver les sécantes communes aux deux courbes. Ce sont ceux qui, quand ils sont pris pour sommets, permettent aux deux courbes de figurer sur la même nappe ou sur les deux nappes d'un même cône ; les autres points sont tout à fait sans valeur graphique ; on les reconnaît, parce qu'ils ne résultent pas d'un point d'intersection réel : les projections des deux droites s'y croisent, sans pour cela qu'elles puissent se rencontrer dans l'espace.

Nous allons, maintenant, passer aux problèmes qui se résolvent, en employant le paraboloïde réglé ; et nous remarquerons, avant d'entrer en matière, que ce ne sera plus la trace de la surface auxiliaire que nous allons avoir à chercher désormais, mais bien la perspective de son contour apparent qui, comme on sait, peut affecter en perspective les diverses formes que sont susceptibles de prendre les courbes du deuxième degré.

Soient données, Pl. III, *fig.* 13, les cinq tangentes 1, 2, 3, 4, 5, tracer la courbe qu'elles enveloppent.

Nous supposerons que ces cinq droites sont les traces

de cinq plans (1) (2) (3) (4) (5) tangents à un même parabolôide, et que ces plans passent par l'œil. Dès lors, ils auront chacun leur point de contact sur le contour apparent de la surface au point même où se coupent les deux génératrices de système différent que chaque plan contient et projette; nous pourrions supposer, en outre, que (1) et (2) touchent chacun la surface à l'infini, et constituent les deux limites de ses deux plans directeurs. Nous ponctuons, en conséquence, ces deux lignes pour donner plus de clarté à notre démonstration.

La ligne (1), d'après la supposition que nous venons de faire pour elle, devra contenir toutes les limites des génératrices du système pair, et la ligne (2) celles de tout le système impair; donc, (3) paire (en désignant ainsi la génératrice paire que le plan (3) projette) aura sa limite en a et (4) impaire, sa limite en b ; (5) impaire, sa limite en c , et (5) paire, sa limite en d . Mais, (5) paire et (4) impaire déterminent un plan, dont la limite est db ; (5) impaire, et (3) paire déterminent un second plan dont la limite est ca ; enfin (3) paire et (4) impaire déterminent un troisième plan dont la limite est ba ; et, comme nous connaissons deux arêtes de l'angle trièdre que forment ces trois plans, savoir: (3) paire et (4) impaire, plus un point de la troisième, soit le point o où les limites des deux plans bd et ca se rencontrent, il s'ensuit que de la droite qui joindra le point o au point de rencontre de (3) et de (4), sera la perspective de l'intersection des deux plans bd et ca ; donc le point où cette droite coupera (5) sera celui où viennent se rencontrer les deux génératrices que (5) projette, c'est donc le lieu du contact de la tangente 5 avec la courbe que déterminent les cinq autres, courbe qui se confond sur le tableau avec la perspective du contour apparent du parabolôide sur lequel nous avons opéré.

Les dispositions de la *fig.* 13, ne permettent pas d'obtenir immédiatement le point de rencontre de 3 et 4,

nous y avons suppléé, en répétant par rapport à (3) impaire et à (4) paire la construction de l'angle trièdre qui contient dans ses faces les deux génératrices (5), et comme les troisièmes arêtes de ces deux angles se superposent en perspective, vu que le même point projette les deux intersections des quatre génératrices qui se superposent en (4) et (3), nous avons obtenu leur direction commune en joignant le point o à son homologue o' dans le second angle trièdre, qui se compose des trois plans dq , cg et gq : on trouve, comme on voit, dans cette double solution le procédé graphique au moyen duquel on peut mener une ligne au point de rencontre de deux autres qu'il est impossible de prolonger ; et c'est dans ce but que nous avons choisi des données qui devaient nous conduire à ce dernier tracé.

La solution du problème primitif s'obtient d'ailleurs d'une façon également directe : on mène par le point h une parallèle à (4) impaire, et par le point k une parallèle à (3) paire ; ces deux droites se rencontrent dans l'espace en p , puisqu'elles sont toutes deux sur le plan ba ; elles déterminent, en outre, avec les deux génératrices (5), d'un côté le plan cb , et de l'autre le plan ad , dont l'intersection commune pn vient couper la ligne 5 au point de tangence cherché. Il est évident que le point m appartient à cette intersection commune, puisque c'est le sommet de l'angle trièdre formé par les trois plans cd , ad et bc .

Etant données, Pl. IV, *fig.* 1, quatre tangentes 1, 2, 3, 5, et le point de contact qui correspond à la tangente 3, trouver la courbe que ces lignes enveloppent.

Nous conserverons aux plans (1) (2) (3) (5) leur signification précédente, et comme il résulte des données du problème qui nous occupe que nous connaissons le point où viennent se couper les deux génératrices (3) paire et (3) impaire, cette circonstance va nous permettre de trouver sur la tangente 5 le point correspondant.

Le plan, dont la limite est ba , contient (3) impaire et (5) paire; celui dont la limite est cd , contient, à son tour, (3) paire et (5) impaire; ces deux plans se coupent suivant une droite dont la limite est en e , et dont nous connaissons un second point, celui où (3) paire et (3) impaire se rencontrent: nous pourrions donc mener cette droite qui viendra évidemment couper (5) au point h qui se trouve commun aux deux génératrices que ce plan projette, et qui sera, par conséquent, le point le contact cherché.

Etant données, Pl. IV, *fig. 2*, les trois tangentes 1, 2, 3 et les points de contact a et c qui correspondent aux deux premières, tracer la courbe qu'elles enveloppent.

Les plans (1) (2) (3) conserveront encore leur signification précédente; mais, ici, comme le point de contact se trouve situé de part et d'autre sur une limite de la surface, il en résulte que nous connaissons la limite des génératrices (1) paire et (2) impaire, qui se rencontrent dans l'espace au point qui se projette en o ; faisant passer un plan $*cd$ par (5) impaire et (1) paire, et un autre $*ab$ par (5) paire et (2) impaire; les limites de ces deux plans viendront se rencontrer en h , limite de leur intersection commune; et o étant un point connu de cette même intersection, il n'y aura qu'à tracer cette ligne pour obtenir encore, par sa rencontre avec (5), le point de rencontre des deux génératrices que ce dernier plan projette; et, par conséquent, le point de contact de la tangente 5.

Changeons la signification des données de ce dernier problème, et nous allons obtenir une solution encore plus complète, en ce qu'elle sera susceptible de toute l'extension que comporte le tracé définitif de la courbe.

Soit, *fig. 3*, les trois tangentes, et par conséquent les trois plans (1) (3) et (4) dans lesquels, comme on voit, nous ne conservons que la limite (1) du système pair, et où les points de contact se trouvent donnés sur (3) et (4),

en m et n , points que nous supposons, en outre, situés tous deux sur le tableau; il s'ensuivra que (3) paire et (4) paire seront entièrement déterminées, et que (3) impaire et (4) impaire le seront également, puisque les limites des plans qui les contiennent, deux à deux avec les précédentes, doivent se trouver parallèles à leur trace commune; donc, enfin ba sera à son tour la limite (2) du paraboloïde, et sera, par conséquent, une nouvelle tangente à la courbe cherchée.

Si, par un point quelconque o de la trace commune des deux plans, nous menons un plan parallèle au plan directeur (1), son intersection avec le plan mn , bd sera la ligne o, d , et celle avec le plan mn , ac la ligne o, c ; donc, ce plan coupera (3) et (4) impaires aux points e et f ; donc, la droite qui passera par ces deux points sera une nouvelle génératrice paire de la surface; car elle s'appuiera sur deux directrices impaires et sera parallèle au plan directeur (1); on obtiendra sans peine son point de contact par une des méthodes indiquées ci-dessus, puisque cette génératrice formerait au besoin la cinquième tangente à la courbe cherchée.

En faisant varier le point o on obtiendra, dans cette figure, autant de nouvelles tangentes qu'on pourra le désirer; et, comme ce tracé est aussi simple qu'expéditif, il conviendra de l'adopter de préférence, dès qu'on sera arrivé par les solutions précédentes à compléter les éléments qui le constituent, savoir: trois tangentes et deux de leurs points de contact. Passons maintenant à la forme dièdre:

Un quadrilatère plan quelconque, lorsqu'on l'envisage comme la projection dièdre d'un quadrilatère gauche, ne peut avoir que deux diagonales réelles; aussi, parmi les trois diagonales que comporte le quadrilatère complet qu'on peut déduire de tout quadrilatère plan, il en est toujours une qui n'a aucune signification projective: sous ce rap-

port, elles marchent deux à deux; chaque couple indiquant, par ses extrémités, les quatre angles du quadrilatère particulier auquel il correspond dans l'espace.

Si on veut supposer, en outre, que les côtés de ce quadrilatère constituent quatre éléments linéaires d'une même surface gauche, puisqu'ils doivent se rencontrer aux extrémités des deux diagonales réelles, on voit qu'ils se diviseront toujours en deux couples de génératrices de système différent. Cette distinction essentielle une fois faite, il suffira, pour compléter la surface, de placer à volonté une troisième génératrice sur les deux éléments directeurs; car, tout plan passant par cette droite, et par un point arbitrairement choisi sur une des diagonales, sera tangent à la surface, et viendra couper les deux autres génératrices en deux points, qui appartiendront au troisième élément du système directeur. Dès lors, en répétant la même opération un certain nombre de fois, il sera possible de terminer entièrement la surface; et, par conséquent, d'obtenir ses deux traces par points, et son contour apparent par la succession de ses tangentes.

Dans cette épure dièdre, tout plan tangent coupera chacune des deux diagonales primitives en un point où viendront aussi concourir les deux intersections produites par lui sur les deux faces du tétraèdre particulier que le quadrilatère gauche détermine, et dont les deux diagonales réelles complètent les six arêtes: toutes opérations dont le tracé se trouve exclusivement linéaire, et qui s'exécutent au moyen des données dièdres, telles que nous venons de les exposer plus haut.

Donc, quand on aura, sur un plan, six tangentes à une même courbe du second degré, en envisageant quatre d'entre elles, comme formant la projection d'un quadrilatère gauche, la cinquième et la sixième devront être telles, que si l'on joint deux par deux leurs points d'appui sur le quadrilatère adopté, en ayant égard, pour

cela, au système particulier de génération auquel chaque côté doit appartenir, telles, disons-nous, que les quatre droites qui opéreront cette jonction puissent concourir par couple en un même point situé sur les diagonales réelles. Cette manière d'envisager le problème donne naissance à plusieurs solutions différentes; on peut s'en rendre compte, comme il suit :

Six tangentes à une courbe du second ordre étant censées représenter, en projection dièdre, trois directrices 1, 2, 3, et trois génératrices 1', 2', 3', si nous désignons chaque plan tangent à la surface par les deux éléments qu'il contient, trois de ces plans, tels que : 11', 22', 33', ou bien 13', 22', 31', etc., se couperont suivant trois diagonales qui viendront séparément concourir en un point étranger à la surface, tandis que toute autre intersection ternaire, dans laquelle le même élément figurerait une seconde fois, aura nécessairement lieu sur la génératrice qui sera commune à deux des sections sur trois, et par conséquent sur la surface. On voit donc qu'il suffira de numérotter cinq tangentes données, de manière à les disposer en projection dièdre sur une même surface gauche, d'après le procédé indiqué ci-dessus, et qu'en satisfaisant à deux quelconques des intersections ternaires auxquelles la sixième tangente devra participer, il sera toujours possible de déterminer immédiatement celle-ci.

Dans cette épure, en donnant au quadrilatère toutes les formes dont il est susceptible, ce qui s'exécute par le changement de ses diagonales réelles, chacune de ces formes fournirait un tracé différent, au moyen duquel on parviendrait à la même solution, c'est-à-dire, à la même sixième génératrice, s'appuyant tantôt sur un couple, tantôt sur un autre, suivant la signification qu'il conviendra de donner aux quatre côtés du quadrilatère, en vertu du changement de forme que les divers couples de diagonales entraînent avec eux.

La propriété de l'hexagone circonscrit à une courbe du second ordre, qui consiste en ce que les trois diagonales centrales d'un pareil polygone concourent toujours en un même point, n'est qu'un cas particulier de cette solution générale. En effet, dans le quadrilatère gauche, Pl. IV, fig. 4, dont $a \cdot b$ et $cd \cdot$ sont les diagonales, si l'on prend cette dernière pour sécante commune, il est aisé de voir que le point o est celui où viennent se rencontrer les trois plans qui coupent séparément la sécante commune aux points c, e, d ; et il est facile de reconnaître dans cette figure les trois directrices $ac \cdot, g \cdot h$ et $\cdot bd$, sur lesquelles s'appuient les trois génératrices $ad \cdot, m \cdot n$ et $\cdot bc$; et, par conséquent, d'en conclure que ces lignes sont les six tangentes d'une même courbe du second ordre, qui forme le contour apparent de la surface qu'elles déterminent.

Cette propriété subsiste encore, quand deux côtés du quadrilatère se trouvent superposés l'un à l'autre, supposition qui ramène la figure à un pentagone circonscrit, et qui correspond au cas où les deux génératrices de système différent que ce côté représente se trouvent dans le même plan projetant. Comme le point qui leur est alors commun est, lui-même, un point de contact du contour apparent de la surface, c'est-à-dire, de la courbe à laquelle le pentagone est circonscrit, on voit qu'en profitant de l'intersection ternaire des diagonales centrales de l'hexagone que ce point complète, on pourra déterminer séparément le lieu de ce contact particulier sur chacune des cinq tangentes; puisqu'il suffira de supposer que chacun des cinq côtés constitue successivement deux génératrices superposées, pour reproduire à chaque fois la forme hexagonale, et pour en déduire les principales lignes qui dérivent de cette forme, soit les six angles, et par conséquent les six diagonales qui la complètent.

L'interpolation par une courbe unique, telle que nous venons de l'exposer, cessant d'être applicable, quand les données du problème excèdent cinq points ou cinq tangentes, on sent que s'il s'agissait de prolonger une portion de courbe accidentellement donnée, il faudrait renoncer à ce mode d'interpolation qui ne permettrait de satisfaire rigoureusement qu'à cinq des points de la portion proposée, et qui trahirait d'ailleurs l'imperfection du tracé, par le défaut de symétrie qui existerait nécessairement entre la portion raccordée et l'arc correspondant de la courbe du second ordre qui lui ferait face. Mais, si on était certain d'avance, que la portion à prolonger se trouve elle-même du second ordre, ces difficultés disparaîtraient, et l'on devra alors y choisir cinq points, dont les deux extrêmes feront nécessairement partie, déterminer les deux tangentes à ces derniers, et terminer ensuite le tracé par le procédé que nous venons d'indiquer.

Quant à l'opération finale de toute interpolation, l'opération matérielle, celle qui consiste à réunir tous les points obtenus par un trait pur, continu, sans hésitations ni jarrets, exceptés dans les cas très-rares où l'on possède des instruments qui permettent d'exécuter le tracé demandé d'une manière continue, le dessinateur se trouve forcé, pour y parvenir, de s'en rapporter uniquement à la fermeté de sa main et à la justesse de son coup-d'œil.

INTERPOLATION PAR UNE COURBE DE NATURE DÉTERMINÉE.

Les problèmes d'interpolation, dans lesquels la nature de la courbe à tracer est déterminée d'avance, se résoudront sans difficulté, en faisant usage des résultats que nous fournissent les solutions précédentes.

Nous rappellerons ici que quatre points ne comportent que des hyperboles, toutes les fois que l'un des quatre se trouve compris dans l'intérieur du triangle formé par les trois autres. On obtiendra donc, dans ce cas, une quelconque

de ces courbes en complétant les cinq données requises par une tangente prise à volonté, suivant l'un quelconque des quatre points donnés. Cette tangente pourra parcourir tout le cadran, en donnant toujours lieu à une hyperbole. Le problème n'est donc indéterminé que dans ce qui concerne la forme hyperbolique; et comme l'hyperbole se réduira à deux droites, quand la tangente passera par deux des points donnés, s'il sera facile de suivre les modifications hyperboliques produites dans la figure par les diverses inclinaisons de la même tangente.

Lorsque les quatre points formeront un quadrilatère à angles saillants, en le complétant aussi par une tangente, on obtiendra en général une ellipse, et, accidentellement deux paraboles, tant que la tangente ne pénétrera pas dans l'intérieur du quadrilatère; on produira une hyperbole dans le cas contraire.

D'après ces remarques, il sera facile de discuter le cas où les données se composeraient de trois points et une tangente: il suffira, en effet, de les compléter, soit par un quatrième point, soit par une deuxième tangente, pour se rendre compte de la nature de la courbe que ces données comportent.

Deux points et deux tangentes admettent indifféremment les trois courbes. Il en est de même de trois tangentes et un point, et de quatre tangentes. Il n'y a d'exception que pour la parabole, qui se trouve impossible toutes les fois que deux des tangentes sont parallèles entre elles. Sans entrer dans des développements qu'on peut, moyennant ces explications préliminaires, regarder comme à peu près inutiles, nous allons traiter les seuls cas qui présentent quelque intérêt; savoir: ceux où la courbe à tracer serait une parabole, et celui plus général qui constitue les courbes de raccordement.

Étant donnés, Pl. IV, *fig.* 5? les quatre points 1, 2, 3, 4, construire la parabole qu'ils déterminent: ce pro-

blème n'est susceptible d'une solution linéaire que quand les points forment un trapèze; traitons d'abord le cas général.

Nous regarderons ces quatre points comme appartenant à la trace d'un paraboloïde dont les limites se trouveraient parallèles, et qui, par conséquent, serait lui-même projeté sur un tableau parallèle à l'intersection commune de ses deux plans directeurs. On sait que, dans ce cas, la section (la trace) est parabolique, puisque la trace et la limite d'une même surface doivent toujours être de forme s'' . et s' . placée. Nous supposerons encore que les génératrices (1) et (2) passent par l'œil, ce qui fixera la direction de (3) et de (4); il ne restera donc qu'à déterminer les limites de ces deux dernières droites, de manière à ce que la ligne qui joint $\cdot 2$ à la limite de (4) soit parallèle à celle qui joint $\cdot 1$ à la limite de (3), et de plus, à ce que (3) et (4) se coupent entre elles; ce qui se réduit à obtenir un trapèze $1, 2, a, b$, dont les diagonales $1, b$ et $2, a$ sont connues de direction, et dont la direction $3, 4$ du côté variable ab se trouve également connue: problème qui, d'après les propriétés générales du trapèze, revient à construire dans l'angle aob un triangle équivalent au triangle 102 , au moyen d'une droite parallèle à $3, 4$.

Sous cette forme, rien n'indique le chemin à suivre pour y parvenir; mais, si nous prenons pour asymptotes les deux diagonales $1, 4$ et $2, 3$ prolongées, et si nous supposons que $1, 2$ soit une troisième tangente hyperbolique, on voit que notre problème revient d'abord à mener à la courbe ainsi déterminée une quatrième tangente parallèle à une direction donnée; et enfin à chercher les points où le diamètre oh , conjugué à la corde asymptotique $3, 4$ et qui joint le centre de cette corde à celui de la courbe situé en o , perce l'hyperbole.

On obtient ces deux points: 1° par tâtonnement, en faisant mouvoir une règle graduée autour du centre g , de

la tangente 1, 2 ou du point g' qui lui est diamétralement opposé, les seuls qui soient connus, ou du moins accessibles dans la courbe, jusqu'à ce que l'égalité des segments compris entre chaque branche de la courbe et l'asymptote en regard, fasse connaître la position particulière de la corde mobile qui vient passer par le point i , commun à la fois à ce diamètre et à la courbe; 2° rigoureusement par la droite et le cercle; on mène alors une circonférence qui passe par l'un des points connus $g g'$, et qui soit tangente aux deux asymptotes. On prend pour sécante commune la perpendiculaire à l'axe asymptotique menée par ce même point (soit la corde réelle commune au cercle et à l'hyperbole); et on exécute l'épure dièdre qui donne l'intersection du cône à base circulaire sur le tableau, celui dont les asymptotes forment le contour apparent, avec le diamètre oh ; ce dernier, situé sur le plan à section hyperbolique dont la sécante commune fournit alors la trace: épure qui, sauf le cercle de base du cône, se résout par de simples intersections linéaires. (Voir cette solution, page 96.) En appliquant aux données de la figure la première de ces deux solutions, on achèvera de déterminer le plan 34 $\cdot a b$ qui contient les génératrices 4 $\cdot b$ et 3 $\cdot a$, et on aura en $\cdot 2$, b et $\cdot 1$, a les limites des deux plans directeurs de la surface. Menant alors (3) paire et (4) impaire, leurs limites se trouveront nécessairement en $\cdot b'$ et $\cdot a'$; donc enfin, une parallèle à $\cdot a b'$, sera tangente en 3 à la courbe, comme une parallèle à $\cdot b a'$ le serait en 4. L'on verra, ci-après, comment doit s'achever le tracé parabolique, quand il se trouve ramené aux éléments de description auxquels nous venons de parvenir.

Si l'on avait trois points et une tangente, en se rappelant que le point de contact 3 peut alors être considéré comme la réunion des deux points 3 et 4, on ramènerait la solution de ce problème à celle de quatre points; la tangente donnerait la direction de la ligne qui joint 3 et 4.

Quand les quatre points donnés formeront un trapèze, Pl. IV, *fig. 6*, la direction des limites parallèles de la surface sera immédiatement connue; et il suffira de mener par 1 et 2, une parallèle à la droite qui divise en parties égales les côtés parallèles 1, 2 et 3, 4. Cette direction s'obtient au moyen des deux intersections *e* et *s* que déterminent les quatre points donnés, réunis deux à deux; nous pourrons, en conséquence, après avoir mené les deux limites de la surface parallèlement à *es*, tracer ses quatre génératrices 3 • *b'*, 4 • *b*, 4 • *a'* et 3 • *a*.

Pour avoir dans cette figure, les tangentes extrêmes de l'arc parabolique, il suffira de porter de *b* en *h* une distance égale à 1, *a'*; car la droite 1 • *h* située dans le plan 1 *b* • *a'* *h* appartient à la surface; elle s'appuie sur les deux génératrices 4 • *a'* et 1 • 1, et son plan de projection 1 *h* • 1 *h* est tangent à la surface au point 1 •, où les deux génératrices 1 • 1 et 1 • *h* qu'il contient ont leur trace commune. Une construction identique donnerait l'autre tangente. Il est encore plus simple de remarquer que ces deux lignes se coupent au point *t*, où elles rencontrent le diamètre *et*, conjugué à la corde qui soustend l'arc qu'elles embrassent.

Pour obtenir encore plus simplement ces tangentes, il faut mener les deux limites de la surface par les deux points intermédiaires 3 et 4; ce sont alors les génératrices 3 • 3 et 4 • 4 qui passent par l'œil; et le plan tangent au point 2 • devra contenir les génératrices 2 • *d* et 2 • *l*. Sa limite • *dl* étant ainsi connue, sa trace sera nécessairement parallèle à cette direction.

Une construction analogue résout encore ce problème, quand les quatre points ne forment pas un trapèze; mais il faut préalablement, alors, trouver la direction des limites, comme nous l'avons indiqué, *fig. 5*. Cette direction une fois connue, on peut également les faire passer par les deux points intermédiaires 3 et 4, ce qui

ramène le tracé à la forme particulière que nous venons d'indiquer.

On peut remarquer, en outre, que pour obtenir, dans cette dernière figure, la seconde parabole qui passe par les quatre points donnés, il suffira de numérotter ces points dans un autre ordre $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } 1, 2, 3, 4 \\ \text{et } 4, 1, 2, 3 \end{array} \right\}$. En donnant les mêmes significations aux points qui portent un même numéro, ces deux notations conduiront séparément aux deux paraboles.

La forme trapézoïdale n'admet qu'une seule courbe, parce que la seconde se confond alors avec les deux côtés parallèles qui constituent le trapèze.

Quand on possédera deux tangentes et leurs deux points de contact, en nous rapportant au tracé de la *fig. 3*, Pl. IV, et en nous rappelant que nous sommes libres cette fois de placer à volonté la tangente mobile *cd*; il est facile de reconnaître que tant que cette tangente variable coupera les deux côtés de l'angle, elle donnera naissance à une ellipse; qu'elle produira une hyperbole, quand elle coupera les deux côtés de l'angle opposé au sommet; et que ces deux courbes deviendront paraboliques, dès que la tangente passera à l'infini. Or, les transversales qui prennent leur origine au point variable *o* doivent, pour satisfaire à cette dernière condition, être menées parallèlement aux deux tangentes fixes (voir *fig. 7*), tout restant le même dans la figure; tel est, en conséquence, le tracé linéaire que l'on doit adopter, en général, pour terminer la description de toute parabole dont on connaît deux tangentes et leurs deux points de contact. Nous allons, d'ailleurs, reprendre ci-après, sous le nom de courbes de raccordement, l'exposé plus circonstancié de cette construction parabolique remarquable, en y joignant celle des autres courbes que ce genre de problème comporte.

Soient encore données les trois tangentes 1, 2, 3, et le point de contact 3; si ce point se trouve situé sur le pro-

longement des côtés du triangle formé par les trois tangentes, il suffit, par les extrémités du côté en regard, de mener des parallèles aux deux derniers côtés; la droite qui joindra leur point de rencontre au point 3 déterminera le point de contact parabolique du côté opposé.

Si le point est donné sur le périmètre du triangle aeb , *fig. 7*, on trouvera le second point de contact, en prenant de b en n une distance telle que le point b divise an en parties proportionnelles à celles que détermine de c en b le point de contact donné. Ce dernier tracé est une conséquence de la proportionnalité des segments tangentiels à une même parabole, propriété sur laquelle nous allons avoir occasion d'insister ci-après.

Soient données enfin, *fig. 7*, les quatre tangentes 1, 2, 3, 4, nous remarquerons que l'ensemble de quatre droites quelconques forme généralement une figure qui a reçu le nom de quadrilatère complet. Les six points d'intersection y sont distribués, trois à trois, sur chacune des droites, et ces points sont susceptibles d'être réunis, deux à deux, par trois diagonales. Or, dans tout quadrilatère complet on trouve : un quadrilatère simple, fermé, à angles saillants $aezd$, et que nous nommerons elliptique, par opposition au quadrilatère simple et non fermé $agzb$, qui, dans la même figure, est susceptible d'envelopper une parabole, et qui recevra, par la même raison, le nom de parabolique. Ces deux quadrilatères seront toujours faciles à discerner; car, parmi les trois diagonales dont nous venons de faire mention, deux ed et gb sont exclusivement, l'une elliptique, l'autre parabolique, et la troisième az appartient, à la fois, aux deux formes. Comme le quadrilatère elliptique sera toujours très-facile à reconnaître, vu qu'il est le seul qui présente un périmètre convexe, on en conclura, sans peine, au moyen des remarques précédentes, l'emplacement particulier des trois diagonales, et par conséquent, celui des

quatre sommets du quadrilatère parabolique; et parmi ceux-ci, il sera facile de discerner les trois sommets successifs b, z, g qui sont les seuls adjacents à la courbe. On en déduira, sans peine, quelles sont les tangentes dont les points de contact correspondent aux deux extrémités de l'arc parabolique embrassé par le quadrilatère.

Dès lors, les deux autres tangentes devront chacune couper les deux premières en parties réciproquement proportionnelles : ces parties étant mesurées entre les points de contact extrêmes m, n , et celui des quatre sommets a qui n'est point adjacent à la courbe; il suffit, en effet, de construire les deux parallélogrammes ao, ao' dont chaque tangente intermédiaire constitue la diagonale, pour établir cette proportionnalité et pour revenir au tracé déjà indiqué de la *fig. 7*; la droite qui joindra les sommets libres de ces deux parallélogrammes, déterminera en m et n les deux points extrêmes du contact parabolique.

Nous venons de remarquer que l'ensemble de quatre droites détermine, sur un plan, ce que l'on appelle un quadrilatère complet, et que cette figure qui, dans sa forme la plus générale, présente six intersections réparties trois à trois sur chacune de ses lignes, admet, en outre, trois diagonales qui achèvent de réunir deux à deux ces mêmes intersections.

Elle jouit d'une propriété assez remarquable, et dont il est facile de tirer parti. Les centres des trois diagonales s'y trouvent constamment situés en ligne droite.

On peut en donner la démonstration suivante : si dans le quadrilatère complet $abcde$, *fig. 8*, on considère les diagonales eb et dc comme représentant des droites inverties en projection polaire, chaque couple de droites, ayant leur trace d'un même côté, donnera naissance à un paraboloïde à contour apparent parabolique. Ces deux surfaces seront inverties, comme les directrices qui les déterminent; la trace de l'une sera superposée à la limite de l'autre,

et elles se couperont suivant la génératrice parallèle au tableau qui occupe en projection la position gh , et qui divise en deux parties égales les perspectives de toutes les directrices des deux surfaces. Si donc nous prolongeons cette ligne, elle viendra rencontrer les traces ad et cn en deux points k et m , qui fourniront le centre des directrices inverties qui se projettent selon ces traces; on obtiendra donc la grandeur entière de ces perspectives en portant de k en l la grandeur ak , et de m en n la grandeur am . Or, il est facile de voir que les points n et l appartiendront à la courbe parabolique qui doit former le contour apparent commun aux deux surfaces, et qu'ils seront précisément les points de contact des deux traces et limites qui se trouvent superposées suivant les lignes cn et ad .

Nous savons (voir la *fig. 1*, Pl. IV) que la ligne qui joint ces deux points de contact doit venir passer par l'intersection f des deux droites bd et ec qui forment les diagonales du quadrilatère simple que les deux tangentes à contact connu déterminent sur les deux autres tangentes be et cd à contact encore indéterminé.

Donc les trois points n, l, f se trouveront en ligne droite; il sera dès lors facile d'en conclure le parallélisme de nf et de mg , et par suite, la division sous-double de la ligne af à son point de rencontre i avec la ligne gh .

Remarquons en passant, que ce parallélisme fournit un moyen immédiat et tout à fait simple, quatre tangentes à une parabole étant données, de trouver le point de contact qui correspond à deux de ces lignes.

Au moyen d'un quadrilatère complet, il devient possible en opérant sur le terrain avec de simples jalons, de prolonger un alignement donné au delà d'un obstacle qui ne permettrait pas de bornoyer dans sa direction: il suffira de disposer le quadrilatère de façon à ce que deux des points de l'alignement donné occupent les centres de deux

diagonales successives, et l'on trouvera au centre de la troisième un nouveau point de l'alignement cherché. Il est bien entendu qu'on choisira des données qui puissent permettre à la troisième diagonale de dépasser entièrement l'obstacle que l'on avait à franchir.

On peut encore, au moyen de la même figure, obtenir la grandeur d'une portion d'alignement inaccessible; il suffira de construire un quadrilatère, tel que l'alignement lui-même, à partir de l'extrémité inaccessible, étant pris pour diagonale, la moitié de sa grandeur totale puisse tomber sur sa partie accessible. Le point milieu de la diagonale s'obtiendra exactement au moyen de la droite qui joint le centre des deux autres. Cette partie d'alignement, comprise comme diagonale dans le quadrilatère, se trouvera donc divisée en deux moitiés, l'une totalement accessible et mesurable, et l'autre composée d'une portion inaccessible et d'une portion accessible, et par conséquent mesurable à son tour; soustrayant donc cette dernière de la moitié entièrement connue, le reste se trouvera nécessairement égal à la distance inaccessible cherchée.

Sans doute ces deux tracés ne devront pas être adoptés de préférence dans tous les cas où l'on sera forcé de surmonter des difficultés du même genre; mais on sait combien de pareilles solutions acquièrent d'importance, quand on se trouve accidentellement dépourvu des instruments spéciaux, au moyen desquels on obtient la mesure des angles. D'ailleurs, après avoir si souvent insisté sur l'importance de la géométrie de la règle, nous devons donner un exemple de son application sur le terrain, et montrer comment elle peut concourir à la solution des problèmes de calcul qui dépendent de l'art du trait.

Nous ajouterons, toutefois, que pour faire usage d'un procédé graphique qui se fonde uniquement sur des intersections de lignes droites, il faut avoir bien soin de disposer les données de manière à obtenir un bon croi-

sement, c'est-à-dire, de faire en sorte que les intersections ne se présentent pas sous des angles trop aigus; sans cette précaution, les erreurs seraient presque inévitables, et l'on ne pourrait se fier aux résultats obtenus qu'après de minutieuses vérifications.

Les segments d'un quadrilatère complet ont entre eux des relations métriques qu'il est important de signaler dans un ouvrage qui traite du calcul par le trait, et que les considérations précédentes vont nous permettre d'exposer avec simplicité. Nous venons de voir, *fig. 7*, qu'un pareil quadrilatère enveloppe toujours une parabole déterminée, et que les quatre points de contact sont distribués de telle sorte que le point *s*, par exemple, divise la portion *be*, comme chacun de ses points d'attache *b* et *e* divisent eux-mêmes les tangentes *am* et *an*. En nous reportant encore à la surface dont cette parabole forme le contour apparent, et dont chaque tangente fournit par conséquent la perspective de deux génératrices superposées, et se croisant au point de contact, il est facile de reconnaître que la portion *ba*, système impair, comprise entre les génératrices paires *be* et *ag*, est divisée par la génératrice paire *dg*, comme celle-ci divise, au point *t*, la portion de génératrice impaire *gz*, qui lui est superposée, et qui se trouve également comprise entre les mêmes génératrices *be* et *ag*. On pourra donc écrire la proportion $ba : bd :: zg : zt$. Par une raison absolument semblable, et puisque *t* se trouve le point de rencontre de deux génératrices superposées de système différent, on aura aussi $ae : eg :: dz : zt$; divisant ces deux proportions l'une par l'autre, il viendra : $\frac{ba}{ae} : \frac{bd}{eg} :: \frac{zg}{dz} : 1$, d'où l'on peut conclure immédiatement la relation symétrique : $\frac{ga}{da} : \frac{eg}{bd} :: \frac{zb}{ze} : 1$. En mettant ces deux proportions sous la forme : $ba . eg . dz = ae . bd . zg$ et $ga . bd . ze = da . eg . zb$, on en peut con-

clure que si, dans le quadrilatère, l'on fait abstraction des deux segments dg et be , et que l'on groupe autour des deux segments bd et eg , les huit segments restants pris deux à deux, en les choisissant de telle sorte que, dans un même produit, les segments ne puissent s'abouter, chaque groupe présentera les trois arêtes d'un parallépipède rectangle, lesquels seront équivalents deux par deux. De plus, en divisant ces deux équations l'une par l'autre

on obtient : $\frac{ae \cdot zg}{ga \cdot ze} = \frac{ba \cdot dz}{da \cdot zb}$, relation dans laquelle les

segments bd et ge ont à leur tour disparu. Enfin, on pourra compléter toutes les relations métriques que peut comporter cette figure, en faisant usage des points de contact t, s, m, n , et en la considérant alors comme donnant la perspective de huit génératrices d'un même parabolôïde à contour apparent parabolique. Nous allons démontrer que, pour cette surface, chaque système de génération est coupé en parties proportionnelles par sa rencontre avec un nombre quelconque des génératrices du système différent.

TRACÉ DES COURBES DE RACCORDEMENT.

Ce problème, dont nous avons indiqué, *fig. 3*, la solution générale, est un de ceux qui se présentent le plus fréquemment dans la pratique de l'art du trait : il y est connu sous le nom de raccordement ; du moins, c'est par cette expression qu'on désigne les divers tracés qui en dérivent.

En supprimant, d'une part, la portion des tangentes qui se trouve située d'un même côté de la corde mn qui joint les deux points de contact, et de l'autre, la portion de courbe qui se trouve du côté opposé, par rapport à cette même corde, on voit que le tracé précité opérera le raccordement des portions de tangentes qui auront été conservées. La *fig. 3*, quand elle est complète, présente donc l'ensemble des deux systèmes de raccordement qu'on

peut opérer sur les mêmes droites, selon le sens où elles doivent se rattacher l'une à l'autre.

Puisque raccorder deux droites par une courbe est, comme nous venons de le remarquer, une des opérations pratiques les plus fréquentes, on ne saurait trop insister sur les procédés divers qui peuvent être mis en usage pour y parvenir; aussi, allons-nous les développer avec tous les détails nécessaires à leur intelligence; et non content de mentionner les solutions rigoureuses, nous y joindrons une solution purement arbitraire, pour montrer, par un exemple, en quoi consiste ce genre particulier d'interpolation.

RACCORDEMENT PARABOLIQUE.

Nous supposons que la parabole cherchée est le contour apparent d'un paraboloïde qui aurait le plan du tableau pour plan directeur du système pair, et pour directrices impaires, Pl. IV, *fig. 9*, les droites $b \cdot a$ et $a \cdot c$, dont la perspective se confond avec la direction des tangentes données. Si nous coupons ces deux droites par une suite de plans parallèles au tableau, ils détermineront chacun, par leur intersection avec les directrices, une génératrice du système pair, et fourniront, par conséquent, une suite de nouvelles tangentes à la courbe cherchée. Mais tout plan parallèle au tableau coupe les perspectives de deux droites quelconques en parties proportionnelles à la longueur totale qui se trouve mesurée sur chacune d'elles entre la trace et la limite; car trois plans parallèles coupent deux droites quelconques en parties proportionnelles, et cette relation ne cesse pas d'exister, quand on projette ces droites sur un des plans sécants. Nous n'aurons donc qu'à diviser une des droites ba en un nombre de parties égales quelconques, à projeter ces divisions sur ac , à les numéroter séparément sur chaque droite, en allant de la trace vers la limite; et toute ligne qui joindra deux numéros du

même ordre, sera une nouvelle tangente à la parabole cherchée, puisque ce sera la projection d'une nouvelle génératrice de la surface. Le point de contact de chacune de ces tangentes se trouvera exactement au milieu de la distance interceptée par les deux tangentes qui la suivent et la précèdent immédiatement. C'est là une des conséquences forcées de l'égalité des divisions opérées sur les directrices $b \cdot a$ et $a \cdot c$; car, il suit de cette égalité que toutes les autres directrices impaires doivent, à leur tour, se trouver divisées en parties égales, par l'ensemble des génératrices parallèles au tableau, qui résultent de ce mode de description; mais, si l'on suit ces intersections ligne par ligne, on trouve nécessairement que la génératrice et la directrice qui se superposent suivant la tangente particulière que l'on considère, se coupent en un point que l'épure ne peut indiquer, car les deux droites se confondent en projection, mais qui n'en est pas moins déterminé, puisqu'il doit, comme tous les autres, diviser en parties égales l'espace compris entre l'intersection qui le précède et celle qui le suit immédiatement. Aussi, quand on tient compte de ce point, sur chacune des transversales, les trouve-t-on toutes divisées en autant de portions égales qu'on en a adopté sur chaque directrice $a \cdot b$ et $c \cdot d$. Ces deux dernières sont tangentes à la courbe, par le même motif, l'une à son point trace b , c'est-à-dire, au point où elle est rencontrée par la génératrice qui lui est superposée, et qui constitue sur le tableau la trace du paraboloidé, et l'autre à son point limite c , c'est-à-dire, au point où la parallèle au tableau qui lui est superposée, et qui se trouve à l'infini, soit la limite du paraboloidé, vient la rencontrer à son tour.

On prolonge la courbe et on la complète, au besoin; en ajoutant de nouvelles subdivisions égales sur chacune des droites ab , ac , soit dans le sens positif, soit dans le

sens négatif, en suivant la série des numéros qui procèdent de la trace à la limite. La *fig. 9* ne présente que les génératrices parallèles au tableau ; mais il est facile de trouver sur leur direction la trace et la limite de chacune des directrices superposée, car c'est l'ensemble de ces points qui constitue la trace et la limite de la surface elle-même.

Puisqu'une série de plans parallèles au tableau coupe les perspectives d'un faisceau de droites en parties proportionnelles, il s'ensuit que le plan qui passe par trois sommets successifs du polygone $pp'p''$, etc., est coupé par le plan parallèle au tableau qui passe par le point intermédiaire p' suivant une ligne qui vient rencontrer la droite pp'' en son milieu, et qui divise nécessairement dans le même rapport la parallèle à pp'' qui joint sur le tableau, les deux points de contact adjacents ; cette ligne, joignant ainsi le centre d'une corde parabolique, au point de rencontre des tangentes qui proviennent des extrémités de l'arc sous-tendu, est un diamètre du contour apparent ; et puisque tous les diamètres d'une parabole sont parallèles, il s'ensuit que le plan qui passerait par $p'p''p'''$ aurait encore sa trace parallèle à celle du plan précédent ; mais ces deux plans ont, par supposition, une ligne $p'p''$ commune ; ils doivent donc se confondre entre eux dans l'espace ; donc enfin, la courbe $pp'p''p'''$ etc. sera plane.

Ce sera encore une parabole : on démontre cette dernière circonstance, en remarquant que, dans cette figure, le plan sécant $pp'p''$ a sa trace parallèle au diamètre parabolique du contour apparent ; et que, par conséquent, il se trouve parallèle à l'intersection commune des deux plans directeurs de la surface ; circonstance qui suffit pour prouver qu'il la rencontre suivant une parabole.

RACCORDEMENTS HYPERBOLIQUES.

Si l'on veut raccorder les deux alignements ab, ac par

un arc d'hyperbole, *fig. 10*, il faut joindre par une droite ac les deux points de contact, mener à celle-ci deux parallèles quelconques équidistantes $b'c'$ et $b''c''$; mais telles, cependant, que l'une d'elles dépasse le point de rencontre a des deux alignements, et achever le trapèze $b'c'b''c''$ dont ces deux alignements forment les diagonales.

Dans ce trapèze, les lignes $b'b''$ et $c'c''$ seront les asymptotes de la courbe cherchée; un couple quelconque de parallèles $b'd$ et $c'e$ passant par les extrémités d'une même diagonale $c'b''$ déterminera, par son intersection avec les asymptotes, une nouvelle tangente ed , dont le point de contact h sera situé au milieu de la corde asymptotique ed interceptée sur elle.

Cette construction se rattache également à une épure polaire: la figure présente un paraboloïde dont les deux traces linéaires ob'' et oc'' sont superposées aux deux limites; il en résulte que les deux systèmes de génération se composent de lignes mutuellement inverties, et que par conséquent les points de contact de celles-ci sur le contour apparent s'y trouvent au centre de leurs perspectives. Pour déterminer une nouvelle génératrice, nous avons fait passer un plan $c'e \cdot b''d$ (deux parallèles) par la directrice $c' \cdot b''$, et la ligne $e \cdot d$, située dans ce plan, ayant sa limite en d et sa trace en e , et s'appuyant sur la directrice $c' \cdot b''$, s'est trouvée une génératrice de la surface; elle a pour directrice invertie la ligne $d \cdot e$.

Ce mode de raccordement hyperbolique a donc, comme le précédent, l'avantage de fournir immédiatement, et la nouvelle tangente et son point de contact.

• RACCORDEMENTS ELLIPTIQUES.

Pour parvenir à la construction des deux courbes de raccordement indiquées ci-dessus, il faut nécessairement connaître le point où viennent concourir les deux alignements donnés; mais on conçoit qu'il peut se présenter

une foule de circonstances pratiques dans lesquelles ce point se trouve ou tout à fait inaccessible, ou placé tellement en dehors de la surface partielle sur laquelle on opère, qu'il devienne impossible de songer à en tirer parti.

Soient donc (Pl. IV, *fig. 3*), les deux alignements mb et nd , dont on suppose le point de concours inaccessible, et qu'il s'agit de raccorder par une courbe tangente aux deux points m et n .

On mènera la ligne indéfinie mn , et, selon le sens où la courbe cherchée devra tourner sa convexité, on prendra, du même côté de mn , sur les deux alignements, quatre points a, c, b, d , formant un trapèze quelconque, assujetti seulement à avoir ses deux côtés a, c et b, d parallèles à mn . Cela fait, pour avoir une nouvelle tangente à la courbe cherchée, il suffira de mener, par un point quelconque o , situé entre m et n , deux transversales qui viennent aboutir aux extrémités d'une des diagonales du trapèze, ces droites, prolongées, rencontreront les alignements primitifs en deux autres points e et f , qui appartiennent à une tangente et déterminent sa direction. Si l'on veut, en outre, obtenir son point de contact, on remarquera que les deux diagonales du trapèze sont elles-mêmes partie des tangentes à la courbe de raccordement: elles correspondent à la portion d'ellipse qui est inutile à la solution du problème, et proviennent, comme cas particulier, de l'extension que reçoit le tracé, quand le point o sort des limites m et n pour parcourir le reste de la ligne. Nous posséderons en conséquence cinq tangentes. Or, nous avons vu que, dans le pentagone circonscrit qu'elles déterminent, il suffit de joindre par une droite le point de rencontre des diagonales extrêmes qui soutiennent un même côté, à l'angle qui lui est opposé, pour obtenir, sur ce côté, le lieu de son point de contact.

Il résulte des considérations précédentes, que plus le trapèze se trouvera éloigné de la ligne mn , plus l'ellipse

décrite sera de forme allongée; quand une des diagonales passera à l'infini, elle deviendra une parabole. On satisfait à ce changement dans les données, en menant les deux transversales qui partent du point variable o , dans des directions constamment parallèles aux deux alignements; c'est-à-dire, allant les rencontrer à l'infini. Nous avons déjà remarqué que ce tracé parabolique revient identiquement, quoique sous une forme plus générale, à celui qui fait le sujet du premier tracé de raccordement. On voit, à l'inspection de la figure, que les deux sommets variables qui, dans chaque parallélogramme, déterminent une tangente nouvelle, divisent toujours la portion des deux tangentes ou alignements primitifs qui se trouve comprise entre leur point de contact et le point de rencontre commune, en deux parties inversement proportionnelles. Or, c'est précisément sur cette dernière propriété que se fonde la construction précitée.

Le tracé, sous cette nouvelle forme, est susceptible d'être précisé de la manière suivante :

Si, par une succession de points pris sur le même côté d'un triangle, on mène des parallèles aux deux autres côtés, dans la série des parallélogrammes ainsi formés, la diagonale indépendante du point de départ enveloppera une parabole. Cette courbe sera tangente aux deux côtés directeurs; le troisième côté formant la corde qui joint leurs deux points de contact. De plus, chaque diagonale coupera ces deux mêmes côtés en parties inversement proportionnelles, et sera, elle-même, divisée par son propre point de contact dans le même rapport suivant lequel elle divise ces deux côtés.

On peut encore conclure de la solution précédente un autre tracé parabolique remarquable par sa simplicité, et susceptible de nombreuses applications.

Une ligne pq qui dans la *fig. 7* diviserait en deux les génératrices qui forment les tangentes extrêmes, divisera

nécessairement toutes les autres dans le même rapport ; on en conclut que si , dans le plan d'un triangle déterminé par trois droites quelconques, on en fait mouvoir une quatrième, de manière à ce que le centre de sa partie interceptée entre deux côtés quelconques se trouve constamment placé sur le troisième, la droite mobile et les trois côtés du triangle seront à la fois tangents à une même parabole. Cette construction, nécessairement triple, donne naissance à trois courbes que l'on obtient ainsi séparément ; elles ont toutes un de leurs points de contact situé sur le milieu du côté triangulaire qu'on a choisi de préférence comme lieu des centres du système de génération correspondant.

RACCORDEMENTS CIRCULAIRES.

Quoiqu'il n'y ait rien de plus simple en apparence que de tracer un raccordement circulaire, il arrive, le plus souvent, que cette opération, quand on veut l'exécuter sur le terrain, y perd tous les avantages quelle présente sur le papier. Comme la facilité de description circulaire tient exclusivement à l'usage des compas, elle disparaît entièrement dès qu'on ne peut plus avoir recours aux grands instruments de ce genre, savoir : le compas à verge ou celui à cordeau, au moyen des quels on obtient le tracé circulaire d'un mouvement continu ; et c'est ce qui arrive toutes les fois que le rayon du cercle à décrire excède 30 à 40 mètres. Un cercle de cette dimension devient aussi difficile à décrire qu'une autre courbe du second ordre ; on ne peut également parvenir à son tracé que par interpolation.

Pour raccorder deux alignements par un arc de cercle à grand rayon, on rapporte à l'une des origines *b* de la courbe (Pl. IV, *fig.* 11), naturellement à celle de départ, une ligne *ba* parallèle au deuxième alignement ; on a ainsi en *abc* le supplément de l'angle à raccorder ;

et, si l'on construit un arc de cercle qui mesure l'ouverture de cet angle, les tangentes extrêmes à cet arc formeront entre elles un angle *def* égal à celui des alignements primitifs. L'arc lui-même constitue donc le raccordement circulaire cherché, exécuté sur une petite échelle; et le rapport linéaire des deux figures se trouve donné par celui qui existe entre la corde *fd* et son homologue sur le terrain. On sera donc maître de choisir ce rapport à volonté, en faisant varier convenablement le rayon du cercle arbitraire.

Supposons, maintenant, qu'on divise cet arc en un certain nombre $2n$ de parties égales, et qu'on lui circoncrive un polygone dont chaque côté ait son point de tangence correspondant à une des subdivisions paires, les angles extérieurs de ce polygone seront constants, et les côtés en seront égaux, excepté le premier et le dernier qui seront moitié des autres. En mesurant à l'échelle un des côtés, on aura par comparaison la grandeur réelle du côté correspondant sur le terrain; et, si l'on rapporte cette grandeur sur les deux côtés de l'angle *mon*, on obtiendra la corde réelle *mn* qui soustend l'angle extérieur du polygone à construire.

Ces éléments une fois connus, on prend sur *bd* une grandeur égale à un demi-côté, ce qui détermine en *g* le premier sommet polygonal; on prolonge cette grandeur du double, et avec cette seconde partie pour rayon, et de *g* comme centre, on décrit l'arc *ch* sur lequel on porte la corde *mn* qui détermine en *h* un second sommet du polygone, et par conséquent son deuxième côté; on prolonge encore celui-ci d'une quantité égale à lui-même; et par une opération absolument identique on arrive ainsi à tracer le polygone tout entier.

En exécutant un pareil tracé, il est rare que l'on arrive du premier coup à une coïncidence parfaite; mais il est facile de se corriger par tâtonnement, en altérant

d'une manière légère les dimensions des angles et des côtés de la dernière portion du polygone. Cette altération, pourvu qu'elle n'admette pas des transitions trop brusques, ne sera pas sensible à l'œil. On opère le tracé final en réunissant par une courbe les milieux de tous les côtés du polygone, et rien ne s'oppose à ce que cette dernière opération soit exécutée paraboliquement.

Ce tracé polygonal peut d'ailleurs, vu son extrême simplicité, être confié à des manœuvres doués de quelque intelligence : on pourra donc le leur faire reprendre et vérifier sans inconvénient, la perte de temps qui pourra en résulter n'ayant pas, sur un grand chantier, une importance appréciable.

A ce tracé régulier, correspond un tracé arbitraire dans lequel, tout en suivant le même principe de description, l'ingénieur se donne à volonté, et sans figure préalable, tant les côtés que les angles extérieurs du polygone qu'il se propose de construire ; et pourvu qu'il en ménage les variations avec intelligence, en les soumettant à une certaine loi de continuité, il parvient à décrire sur le terrain des courbes qui satisfont l'œil presque aussi bien que celles qui sont le produit des tracés rigoureux.

Les raccordements circulaires sont spécialement appliqués au tracé des chemins de fer ; on les y emploie de préférence, vu que la grandeur du rayon de courbure étant une des conditions impérieuses du tracé, ce rayon n'a besoin que d'être vérifié une fois pour toutes, quand il s'agit du cercle ; tandis que si l'on employait une autre courbe du second degré, outre les difficultés matérielles du tracé, il serait encore nécessaire de s'assurer que, parmi tous les rayons de courbure de l'arc de raccordement, il n'en est aucun d'inférieur aux conditions de grandeur requise.

Quand on peut apercevoir les deux extrémités de la

corde qui réunit les points que l'on veut raccorder circulairement, on peut aussi, pour tracer l'arc de cercle, se servir de la propriété des angles qui ont leurs sommets situés sur la circonférence : on sait qu'un angle constant, dont le sommet varie de manière à ce que ses côtés passent toujours par les extrémités d'une même corde, a pour mesure constante la moitié de l'arc que cette corde soustend ; il s'ensuit que son sommet parcourt dans ce mouvement le double de l'arc supplémentaire. Il ne reste donc plus qu'à déterminer l'ouverture de l'angle mobile, de façon à ce que l'arc parcouru soit tangent aux deux alignements qu'on veut raccorder. Or, cet angle est celui que la corde de contact fait des deux côtés avec la portion des alignements à raccorder ; et pour que le cercle soit possible, il faut que ces deux angles soient égaux.

C'est ordinairement au moyen des alidades d'un graphomètre que l'on exécute cette opération ; les alidades sont d'abord fixées de manière à former entre elles l'angle constant, et l'on place l'instrument, à chaque station, de manière à ce que les deux rayons visuels qu'elles déterminent passent par les deux points du raccordement donnés ; à chaque position de l'instrument correspond un point du cercle. Une fausse équerre atteindrait le même but.

Avant de terminer cette partie, nous avons à exposer la méthode par laquelle se résolvent au moyen, d'une courbe unique, les problèmes d'interpolation, que nous avons réservés en commençant ; elle dépend de la projection dièdre, et s'y rattache par les considérations suivantes : l'intersection de deux plans qui coupent à la fois une même surface du second ordre étant prise pour sécante commune, conserve par rapport à ces courbes toutes les propriétés qui dérivent de cette supposition, soit que par le fait cette ligne forme la corde qui leur est commune, soit qu'elle se trouve située tout entière en

dehors des deux périmètres; auquel cas, les courbes n'ont entre elles aucun point de commun.

Ainsi, par exemple, deux tangentes émanant d'un même point de la sécante, et aboutissant à chacune des courbes séparément, appartiennent au plan tangent à l'une des deux surfaces coniques que ces courbes déterminent; et par conséquent, la droite qui joint les deux points de contact est une génératrice de cette dernière surface, et passe par son sommet. En projection, ce sommet dévient le point d'où l'on peut mener, à la fois, deux tangentes communes aux deux courbes primitives, ces deux tangentes figurant le contour apparent conique correspondant; il faut donc qu'elles soient disposées de manière à ce que la surface conique puisse contenir à la fois les deux courbes données, ce qui exclut comme sommet ceux des points suivant lesquels se rencontrent les quatre tangentes communes à deux courbes du second ordre qui ne satisfont pas à cette condition. Ces relations font connaître la sécante par le sommet; et réciproquement.

Or, si dans les deux courbes ainsi liées il se trouve un cercle, rien ne sera si facile que de transporter sur le plan du cercle toutes les opérations qui seraient données à exécuter sur le plan de la courbe non-circulaire; car il suffira de projeter polairement l'une des figures sur le plan de l'autre, en prenant pour pôle le sommet du cône qui les contient toutes deux. C'est ce que nous avons déjà exécuté Pl. III, *fig. 6*, dans laquelle il s'agit de trouver l'intersection d'une hyperbole avec une droite. Nous nous contenterons de donner un second exemple de l'application de cette méthode aux problèmes d'interpolation qui ne sont pas susceptibles d'une solution linéaire, pour en bien faire apprécier l'esprit, et pour en signaler toute la généralité.

Soit proposé de faire passer une courbe du second

ordre par trois points donnés abc , Pl. V, *fig. 1*, de telle sorte que cette courbe se trouve tangente en même temps à deux lignes quelconques om et on .

Nous pourrions toujours, par l'un de ces points a , faire passer un cercle amn qui touche à la fois les deux droites données, et regarder alors ce cercle comme la base d'un cône dont les deux tangentes figureraient le contour apparent en projection sur le tableau; le sommet de la surface correspondant ainsi au point o , où les deux tangentes se rencontrent. Si nous regardons alors les deux autres points b et c , comme situés sur ce même cône, il est clair que le plan sécant qu'ils déterminent avec le point a donnera naissance à une intersection conique qui se confondra avec la courbe cherchée. Remarquons en outre que, par le choix de ces données premières, on reconnaîtra si le problème proposé se trouve susceptible de solution. Admettons, par exemple, qu'un des trois points soit situé en dehors de l'espace angulaire, suivant lequel les deux nappes de la surface conique se projettent, et il deviendra impossible de satisfaire à cette disposition particulière des données, par cela seul qu'il serait impossible de disposer entre les tangentes une surface conique, telle que les trois points puissent s'y projeter à la fois. Contrairement, donc, à ce que nous avons vu jusqu'ici, il existe des cas où l'on ne saurait satisfaire à ces cinq données. Moyennant ce tracé préliminaire on pourra, quand ces cas se présenteront, s'en rendre compte *à priori*.

Les trois points abc correspondent à trois droites passant par l'œil; ces droites déterminent réellement six points de la surface. Elles la coupent une première fois, selon sa partie vue, et une seconde fois, dans sa partie postérieure au contour apparent. Mais, comme on peut se donner le sens dans lequel se présente le cercle de base, par rapport à ces deux parties, ce qui s'effectue

en ponctuant l'arc postérieur, ces six points se réduisent à cinq, puisque le point a se trouve alors tout à fait connu de position. Les quatre autres seront b^1 , c^1 , les grandes lettres de chaque couple indiquant le point antérieur; cinq points, combinés trois à trois, correspondent à quatre plans que nous désignerons par les triangles d'où ils dérivent, savoir : abc , ab^1c , a^1bc , a^1b^1c , et ceux-ci se projetteront coniquement, à partir du point o , en ab^1c' , ab^1c^1 , a^1bc' , $a^1b^1c^1$. Les lettres ponctuées correspondent ici à la projection conique des quatre droites, dont la perspective se superpose en bc ; par conséquent, si l'on prolonge cette dernière ligne, les divers points $defg$ où elle viendra rencontrer chacune des projections, seront les traces des quatre droites quelle projette; il suffira donc de les joindre au point a , pour avoir les traces des quatre plans suivant lesquels nous avons à couper la surface, ou les quatre sécantes réelles communes au cercle de base et aux diverses courbes de section que nous avons à décrire, chaque sécante déterminant sur le cercle un quatrième point de la courbe particulière à laquelle elle correspond.

Pour trouver les points de contact de ces diverses courbes avec le contour apparent conique, par l'une quelconque on , des génératrices qui le constituent, et par le point a , on fera passer un plan; sa trace an coupera chacune des quatre projections de bc en 1, 2, 3, 4; et en joignant ces divers points au sommet du cône, on obtiendra l'intersection du plan oan avec chacune des quatre droites, dont bc se trouve la perspective. Donc enfin, en joignant au point a , chacun de ces derniers points c^1 , c^2 , c^3 , c^4 , on aura dans le plan oan quatre droites qui appartiendront séparément à l'un des plans sécants, et qui, prolongées, viendront rencontrer la génératrice on aux quatre points n^1 , n^2 , n^3 , n^4 , où elle est coupée par ces divers plans; c'est-à-dire, aux quatre points où les

courbes de section lui seront tangentes. Une opération semblable conduirait au même résultat sur la génératrice *om*. C'est d'ailleurs le procédé général pour obtenir la courbe par points, en l'appliquant à une génératrice quelconque.

Il serait tout aussi facile de déterminer une tangente à la courbe suivant un de ses points ; ainsi, soit donné le point *b*, on mènera la trace du plan tangent au cône, suivant la génératrice *ob* ; cette trace qui passe par *b'*, viendra rencontrer en *h* la sécante commune du plan *abc* ; joignant ce point à *b*, on aura dans ce plan la tangente *hb* cherchée, et ainsi de suite, pour les autres points, selon le plan auquel ils appartiendront.

Nous ne nous étendons pas davantage sur cette figure : il est bien clair que du moment où nous avons pu transporter les données du problème sur un plan et sur un cône, la difficulté ne consiste plus qu'à compléter l'intersection de ces deux surfaces. L'on voit qu'on y parvient sans peine, par une seule projection ; et que, sauf le cercle de base, tout le reste de l'épure s'opère alors linéairement.

Quant à la généralité de la méthode, il semble que les résultats la signalent suffisamment, puisque ce n'est pas une simple courbe à laquelle nous avons été conduit, mais bien aux quatre courbes différentes que comportait le problème que nous avions à résoudre. Pour éviter une trop grande confusion de lignes, nous n'en avons tracé que deux ; mais il est bien facile d'en conclure le moyen d'obtenir les deux autres.

On comprend aussi que tout ce qui se trouverait proposé, par rapport à l'une quelconque des quatre courbes, pourrait se ramener à un problème de même genre, dans lequel la courbe se trouverait remplacée par le cercle de base du cône, et cela, par une projection identique à celle au moyen de laquelle nous avons lié les cordes de

ce cercle aux diverses lignes dont elles se trouvent la projection conique, quand on prend pour pôle le sommet o.

INTERPOLATION PAR UNE SUCCESSION D'ARCS
DE MÊME NATURE.

Quand le nombre de points par lesquels on a à faire passer une courbe excède cinq, nous avons déjà remarqué qu'on devait, en général, renoncer à satisfaire par une courbe unique aux conditions du problème, et qu'il fallait y suppléer par une suite d'arcs de courbe semblables. Ces arcs on les choisit de manière à ce qu'ils se succèdent sans jarrets, c'est-à-dire, en leur conservant toujours une tangente commune à chaque point où s'opère la rencontre de deux arcs successifs. Une autre condition essentielle à remplir, c'est que la courbure ne soit pas trop disparate en passant d'un arc à l'autre.

Le cercle et la parabole sont les deux seules courbes que l'on emploie à ce genre d'interpolation. Ce choix a été déterminé tant par la facilité de description que ces deux courbes comportent, que par la variété de courbure que l'on peut en obtenir au moyen de simples modifications dans leurs données.

Pour interpoler par arcs de cercles, on fait passer un premier arc par les trois premiers points donnés; on détermine la tangente au troisième point, et on assujettit l'arc de cercle suivant à passer par le quatrième et le troisième point, et à avoir, selon ce dernier, une tangente commune avec l'arc précédent. Les arcs suivants se déterminent par les mêmes conditions que le second. L'on produit ainsi un assemblage d'arcs qui représente assez bien la courbe cherchée. Plus les cercles se rapprochent du cercle osculateur qui dérive du point auquel ils correspondent sur cette courbe, et plus elle se trouve représentée avec exactitude.

Cette méthode est assez simple pour nous dispenser

d'insister sur le procédé général qui en est la conséquence ; nous nous arrêterons seulement à développer un des cas particuliers qu'elle présente , et qui se rapporte à la construction des voûtes dites en anse de panier.

Quand la montée d'une voûte doit être moindre que sa demi-largeur , ce qui paraît d'abord le plus simple est de soumettre son tracé à la forme elliptique. Mais les difficultés pratiques que semblent présenter tant le tracé linéaire d'un cintre elliptique, que celui de ses plans de joints , qui doivent tous être normaux à la courbe , font que presque toujours on substitue à l'ellipse une suite d'arcs de cercles tangents , c'est-à-dire , qu'on parvient au tracé de l'arche par l'interpolation circulaire. Nous allons voir bientôt que ces difficultés n'ont rien de bien réel , et qu'il est presque aussi facile de tracer une ellipse et ses normales , que de déterminer une anse de panier à plusieurs centres. Comme dans les conditions de ce problème , il y a quatre données invariables , savoir : les deux points qui correspondent à la naissance de la voûte et à son sommet , plus les deux tangentes en ces deux points , l'une verticale et l'autre horizontale , il faut au moins deux arcs de cercle pour satisfaire aux conditions du tracé. On peut encore , comme nous allons le voir bientôt , insérer un plus grand nombre d'arcs dans le même intervalle ; on a distingué les courbes qui en résultent par le nombre d'arcs ou plutôt par celui de centres qu'elles comportent.

Anse de panier à trois centres. — Quand on veut parvenir de la naissance à la montée d'une voûte , au moyen de deux arcs seulement , Pl. V, fig. 2, on décrit un quart de cercle , ayant la demi-ouverture de l'arche pour rayon , on partage cet arc en trois parties égales ; par la division a , la plus voisine du sommet , on mène le rayon ao , et les cordes ab , ac qui y aboutissent ; on projette sur la grande corde la différence bd du rayon à la montée paral-

lément à la petite, et le point g qui, dans cette projection, correspond à la montée est celui de jonction des deux arcs de cercle cherchés. Leur centre s'obtient immédiatement en projetant à la fois le point g parallèlement au rayon ao : 1° sur le diamètre de l'arche, 2° sur le prolongement de sa ligne de montée. L'égalité des angles aob et $go'b$ démontre que les deux arcs comprennent l'un 60° et l'autre 30° , de sorte qu'en terminant le cintre, il se trouve réellement composé de trois arcs d'un même nombre de degrés. De là le nom d'anse de panier à trois centres sous lequel cette espèce de courbe est connue.

On aurait pu choisir pour lieu de jonction des deux arcs un autre point quelconque; mais on voit bientôt que si le point choisi était tel que sa tangente passât par le point d de montée, cette tangente constituerait elle-même le second arc, et que, par conséquent, ce tracé et ceux qui en seraient les plus voisins se trouveraient défectueux par l'énorme différence de courbure qui présenteraient les deux arcs successifs. Aussi c'est à balancer convenablement cette différence que consiste tout le mérite d'un pareil tracé : celui que nous venons d'exposer y arrive en faisant les arcs d'un même nombre de degrés; mais la différence des deux courbures ne laisse pas encore que d'être assez sensible à l'œil.

On parvient à réduire cette difficulté en augmentant le nombre d'arcs à interpoler entre la naissance et la montée.

Anses de panier à cinq centres. — Cette construction y procède par trois arcs : sur la demi-ouverture on trace encore un quart de cercle; même *fig. 2*, que l'on divise cette fois en cinq parties égales; on mène les rayons impairs à partir du sommet, et les trois cordes qui soustendent les arcs correspondants; parmi ces cordes, une seule ef est invariable de position, la seconde bh doit être transportée parallèlement à partir du point d ; la troisième seule hf , tout

en conservant son parallélisme, peut prendre les positions diverses $f''f'''$, etc. Si nous cherchons le centre qui correspond à f''' , nous le trouvons en s , point où la perpendiculaire abaissée sur le milieu de la corde rencontre le rayon ho prolongé; et si nous joignons ce point au point de rencontre t des deux autres cordes, nous aurons une ligne qui sera le lieu des centres des arcs intermédiaires, en prenant dans cette figure celui qui divise la portion te aux trois septièmes, on satisfait assez bien aux conditions d'un tracé régulier.

Anses de panier à sept centres. — Après avoir tracé le quart de cercle comme dans le problème précédent, *fig. 3*, on le divisera en sept parties; et, par les divisions impaires, à partir du sommet, on mènera les trois rayons correspondants, et les quatre cordes qui aboutissent à leur extrémité. De ces quatre cordes, quand on passe à l'anse de panier, l'une est toujours invariable; c'est celle qui aboutit aux naissances; une autre ad , celle qui correspond à la montée, est connue de direction et de position. Il reste à disposer convenablement les deux intermédiaires, qui, tout en gardant leur parallélisme, peuvent chacune occuper une foule de positions différentes. Il s'agit de les projeter sur la courbe nouvelle (nous nous servons du mot de projeter qui n'est pas rigoureusement exact, puisque les lignes qui opèrent cette espèce de projection ne sont pas parallèles), de manière à ce que le cintre qui doit en résulter soit le plus agréable à l'œil possible: on obtient ce résultat en faisant coïncider les deux premiers points de rencontre a et b des cordes variables avec l'ellipse qui satisferait aux conditions du problème. Nous allons donner, ci-après, un moyen très-simple d'obtenir le tracé de cette ellipse.

Les auteurs qui se sont occupés des anses de panier à plusieurs centres, ont donné des procédés graphiques et des tables arithmétiques pour en déterminer facilement les

rayons , dans le cas d'un nombre d'arcs plus considérable que sept ; quant à nous , en fournissant ci-après les moyens de faire coïncider la succession des arcs soit avec une demi-ellipse , soit avec une demi-parabole , selon que l'on voudra obtenir un débouché plus ou moins considérable , nous croyons avoir satisfait à toutes les exigences réelles d'un pareil tracé. Il n'est pas d'ingénieur , ayant exécuté de grandes courbes , qui ne sache combien sont vaines toutes les précautions que l'on peut prendre , avant le décintrement d'une voûte , pour en assurer la régularité mathématique ; et il n'en est pas un , sans doute , qui ne se soit aperçu qu'au delà d'un certain degré d'exactitude , dont les limites sont d'ailleurs assez larges , l'œil le plus exercé ne saurait apprécier les défauts de courbure qui sont la suite inévitable d'un décintrement opéré sur des arcs à grande portée. Puisqu'il y a toujours une dernière opération dont on ne saurait prévoir l'effet , il peut sembler assez inutile de viser à une exactitude que cette dernière opération doit nécessairement vicier , et que d'ailleurs les exigences de l'œil ne justifient pas d'une manière suffisante.

Après avoir traité de l'interpolation par une suite d'arcs de cercle , il nous reste à parler de celle qui a lieu par une suite d'arcs de parabole. Cette dernière courbe pouvant comprendre dans chacun de ses arcs un point de plus que le cercle , se prête bien mieux à suivre les formes sinueuses qu'il s'agit de représenter. Le système à suivre est , d'ailleurs , absolument le même dans l'un et l'autre cas , sauf la quantité de points embrassés par l'une ou l'autre courbe.

Ainsi , par les quatre premiers points donnés on fait passer un arc de parabole , dont on détermine seulement les tangentes extrêmes ; par 4 , 5 et 6 on fait passer ensuite un second arc avec la condition d'avoir , selon le point 4 , une tangente commune avec le précédent , et l'on détermine

également la tangente extrême qui correspond à 6 (voir la solution de ces problèmes, page 145). Les arcs subséquents sont déterminés par des conditions analogues. Cette construction préparatoire exécutée, il ne reste plus qu'à tracer définitivement chaque arc en particulier; et ceux-ci étant donnés chacun par deux tangentes et leur point de contact, sont tous susceptibles d'une même description parabolique: celle par les tangentes enveloppes que nous avons indiquée à la section des raccordements.

Quand les quatre données qui déterminent un arc se refuseront au tracé parabolique, ce qui arrivera, comme nous l'avons déjà remarqué, toutes les fois qu'un des quatre points sera compris dans l'intérieur du triangle formé par les trois autres, ou quand la tangente passant par l'un des points coupera la corde qui en réunit deux autres, il suffira de réduire d'une unité le nombre des points compris dans cet arc pour que le tracé redevienne possible; l'on reprendra les quatre données dès que la disposition des points le permettra de nouveau. Ces cas exceptionnels ne se présentent, d'ailleurs, que rarement; ils indiquent presque toujours entre eux un point singulier soit d'inflexion, soit de rebroussement.

Les ingénieurs, dans les études qu'ils font des tracés de route, en pays de montagne, mettent en usage et emploient pour ainsi dire simultanément les procédés d'interpolation par arcs de cercle et par arcs de parabole.

Pour faire franchir la crête d'une montagne à la ligne de communication que l'on projette, il faut d'abord chercher sur le terrain, au moyen du niveau de pente, une succession de points isolés appartenant à la courbe de pente égale qui s'applique sur le revers qu'on se propose de parcourir. Ces points déterminés et piquetés, on en lève le plan; et une fois qu'ils sont rapportés sur le papier, on opère entre eux une interpolation graphique par arcs de cercle tangents; on parvient ainsi, quelles que soient les

variations accidentelles du terrain, à donner à la ligne de pente égale, ou, pour mieux dire, à la suite d'arcs qu'on lui substitue (les parties d'alignements rectilignes pouvant être considérées comme des cercles d'un rayon infini), une courbure régulière à l'œil, et s'écartant le moins possible de la ligne de descente égale, qui donnerait les moindres déblais si on pouvait constamment la suivre sur toute la longueur du parcours.

Mais, quand il s'agit ensuite d'en venir à l'application, cette interpolation opérée dans le cabinet par arcs de cercle, se traduit presque toujours sur le terrain par des arcs de parabole; et cela, parce que, dans le cabinet et sur le papier, comme nous avons déjà eu lieu de le remarquer, la première méthode est la plus facile à exécuter, car elle n'exige que l'emploi de la règle et du compas; et que sur le terrain, la seconde reprend à son tour l'avantage. On peut l'exécuter, en effet, au moyen d'une chaîne et de quelques jalons, tandis que dans les mêmes circonstances on ne pourrait parvenir à tracer une suite d'arcs de cercle tangents, sans être obligé de mettre en œuvre des instruments destinés à la mesure des angles, instruments qu'on n'a pas toujours sous la main et qui ne peuvent être confiés à tout le monde, ce qui ne permet pas de familiariser les ouvriers avec les tracés qui en dépendent.

Nous devons remarquer encore que, pour simplifier cette interpolation parabolique, l'ingénieur se contente de placer à l'œil les deux tangentes extrêmes qui embrassent chaque arc en particulier, et que le procédé se réduit seulement alors à mener des transversales qui coupent ces tangentes en parties inversement proportionnelles, et se borne, par conséquent, à la dernière portion du tracé régulier d'interpolation parabolique que nous avons rappelé ci-dessus.

Nous venons de signaler une nouvelle circonstance dans

laquelle on s'en rapporte à l'œil, pour obtenir quelques-unes des données indispensables à l'interpolation graphique; loin de se trouver les seules dans lesquelles l'œil soit pris en quelque sorte pour unique juge de l'exactitude d'un tracé, elles appartiennent à une dernière méthode d'interpolation qu'on pourrait appeler arbitraire; et qui consiste à faire passer à la fois, par tous les points donnés, une ligne courbe que le dessinateur trace à volonté, soit en se confiant à la sûreté de sa main et à la justesse de son coup d'œil, soit en employant pour auxiliaire une règle courbe, disposée de manière à présenter dans son contour les différentes espèces de courbures les plus usitées, et sur laquelle il cherche, à vue d'œil et par tâtonnement, les parties qui correspondent le mieux aux points successifs qu'il veut réunir par interpolation. Si la règle courbe présentait une forme demi-parabolique, cette interpolation toute mécanique se rapprocherait, comme on voit, de l'interpolation rigoureuse que nous avons donnée ci-dessus.

Il ne faut pas croire que ce dernier procédé, tout inexact qu'il paraisse, soit de nature à donner des résultats dont on ne puisse tirer parti: il est telle circonstance où l'on ne saurait même en employer d'autres, à moins d'y consacrer un temps trop considérable.

Nous avons eu lieu d'en faire une application assez concluante: il s'agissait de réduire aux dimensions métriques une table à deux entrées, qui avaient été calculées en pieds, pouces et lignes. Pour y parvenir par la méthode la plus simple, nous avons d'abord traduit cette table graphiquement, et elle nous a donné une suite de points isolés que nous avons réunis par une série de courbes successives tracées par la méthode arbitraire; ces courbes une fois arrêtées, il nous a suffi de superposer aux coordonnées duodécimales des abscisses et des ordonnées métriques de grandeurs relatives, pour avoir à la fois, par les abscisses, les nouvelles entrées, et par les ordonnées

les résultats correspondants de la table que nous voulions transformer.

Il est un autre service important que rend encore l'interpolation graphique, et que nous ne pouvons passer sous silence; elle offre un moyen général d'obtenir approximativement la solution des problèmes, par la méthode dite de fausse position.

En appliquant un tracé soit régulier, soit arbitraire, à la construction des courbes d'erreurs qui résultent d'une suite de valeurs approchées que l'on donne successivement à l'inconnue, on parvient à trouver parmi ces valeurs approximatives celle qui rend l'erreur nulle, et satisfait par conséquent aux conditions du problème. Nous aurons occasion dans la partie suivante de donner quelques exemples de ce procédé; ce sera la meilleure explication que nous puissions en fournir. Ici les valeurs arbitraires constituent l'argument; et la fonction est l'erreur en plus ou en moins que l'on commet en substituant une de ces valeurs arbitraires au lieu de la valeur réelle que l'on veut déterminer.

ARCHES A CINTRES ELLIPTIQUES ET PARABOLIQUES.

Nous avons fait pressentir qu'un des motifs allégués pour l'adoption des arches à interpolation circulaire, celui de la difficulté du tracé d'un cintre elliptique et de ses normales, était dénué de fondement réel. Nous allons le démontrer d'une manière complète, en donnant un moyen extrêmement simple d'obtenir cette dernière espèce de courbe.

Soit *ab*, Pl. V, *fig.* 4, l'ouverture d'une arche et *oc* sa montée, on demande le tracé du cintre elliptique qui correspond à ces données. Construisons sur *ab* le demi-cercle *abd*, et supposons que ce demi-cercle en tournant autour de *ab*, pour passer de sa position primitive à la position verticale, celle dont *ab* lui-même serait la projection, ait engendré un quart de sphère. Dans ce mouvement, il y aura une

des positions intermédiaires telle que le point d se projettera en c , et par conséquent dans laquelle la projection du cercle mobile se confondra avec le cintre elliptique que nous cherchons. Chaque point de l'ellipse et chacune de ses tangentes pourront donc être considérés comme les projections d'autant de points et de tangentes appartenant au cercle générateur relevé suivant un certain angle; et il suffira de connaître les relations qui lient les points et les lignes homologues qui correspondent à cette position particulière, pour pouvoir en conclure immédiatement leur tracé réciproque.

1° Chaque point du cercle mobile décrivant une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la charnière ab , se mouvra en projection suivant une perpendiculaire à cette charnière; 2° chaque tangente au cercle le sera également à la sphère, et décrira un cône tangent à celle-ci, dont le sommet sera un point invariable de la charnière; 3° la tangente en d décrira un cylindre dont les génératrices seront parallèles à la charnière ou sécante commune des deux courbes.

Dès lors, on voit que la tangente ed se projette en fc parallèlement à elle-même, et qu'un point quelconque de cette tangente k se projette perpendiculairement en l ; par conséquent la tangente ik , dont le point i ne varie pas, se projette en il , et son point de tangence g se projette en h . Nous avons donc ici tout à la fois une tangente à l'ellipse et le point de contact qui lui correspond.

Réciproquement, pour passer d'un point h de l'ellipse à son point correspondant sur le cercle, on joindra ce point à la charnière par une droite quelconque fo ; le point f de la tangente fo se projetant en e sur la tangente correspondante cd , la ligne eo sera ce que devient fo en rabattement; dès lors le point h se rabattant à son tour suivant une perpendiculaire à la charnière, correspond en g sur le cercle. On voit que nous ne péchons

pas par défaut de solutions, puisque nous venons de donner un double tracé pour passer du point *h* au point *g*, et réciproquement. Nous l'avons fait, non-seulement pour fournir un procédé de vérification, mais pour prouver qu'on pourrait, au besoin, renfermer le tracé de l'ellipse de ses cordes et de ses tangentes dans le quadrilatère *aed*, et par conséquent ramener tout le tracé à une construction qui ne sortit jamais de l'épure sur laquelle on aurait à exécuter le cintre dans sa véritable grandeur.

Une construction entièrement analogue, et fondée sur le même principe de relèvement, pourrait être mise en œuvre en se servant du petit cercle construit sur *co*; l'ellipse elle-même serait alors censée se mouvoir, et le cercle serait considéré comme figurant sa projection dans une de ses positions inclinées.

L'architecture ne se borne pas à appliquer l'interpolation circulaire à la construction des arches; elle la met encore en usage pour décrire les volutes de ses chapiteaux, les doucines de ses profils et les rampants de ses voûtures. On trouvera, dans l'ouvrage de Durand, les tracés qui correspondent à ces diverses courbes; ils n'offrent rien d'assez particulier pour que nous soyons dans le cas d'insister sur leur procédé de description.

Avant de terminer ce que nous avons à dire sur le tracé des arches par interpolation, nous ferons remarquer l'utilité que l'on peut tirer de la comparaison du tracé elliptique, tel que nous venons d'en donner les règles, avec celui en anses de panier. Nous n'avons, en effet, après avoir déterminé ces derniers cintres, qu'à chercher les points analogues de l'ellipse qui correspondraient aux points de raccordement des arcs de cercles qui les composent: c'est ce que nous avons fait pour les *fig. 2* et *3*; l'on voit que les deux tracés se sont servi de vérification mutuelle. Ainsi, dans l'arc à trois centres, le point de raccordement *g* tombe presque sur le point cor-

respondant du contour elliptique; dans la courbe à cinq centres, le point homologue correspond à peu près au milieu du second arc, c'est-à-dire, de celui qu'il s'agit réellement de déterminer, puisque c'est le seul dont la corde soit variable de position; enfin, dans la courbe à sept centres, c'est l'ellipse qui nous a fourni l'origine *a* et *b* des deux arcs dont les cordes sont variables. On trouvera donc tout à la fois, dans cette comparaison, un moyen de vérification de tracé, comme on pourrait y trouver un moyen d'obtenir les grandeurs des rayons pour former l'anse de panier sans tâtonnement préalable. On voit encore ici que, dans la méthode graphique, tout se tient, en quelque sorte, et qu'une construction nouvelle est à la fois un nouveau moyen de résoudre le problème qu'on s'était proposé, et une vérification pour les constructions précédentes. Nous allons fournir une autre preuve de cette vérité, en cherchant à appliquer aux arches surbaissées la forme parabolique.

L'interpolation parabolique peut aussi bien que la circulaire convenir au tracé des voûtes surbaissées, et l'on remarquera à son avantage qu'un seul arc de parabole satisfait aux conditions du problème, et suffit toujours pour tracer la demi-voûte, tandis qu'il faut nécessairement au moins deux arcs de cercle pour atteindre de la naissance à la montée.

Les arches surbaissées donnent, comme nous l'avons déjà remarqué, quatre conditions de tracé, savoir : deux points de la courbe et les deux tangentes correspondantes. Or, ces quatre conditions déterminent à volonté, soit un arc d'ellipse, soit un arc de parabole. En construisant ce dernier par ses tangentes enveloppes, il en résulte la demi-voûte *cb*, *fig. 4*. Si on compare celle-ci à la demi-voûte elliptique, on reconnaît bientôt que le débouché offert par la parabole est beaucoup plus considérable; il suffit pour cela de remarquer que les deux lignes *il* et *mn*

sont tangentes à ces deux courbes et correspondent à la même abscisse. Il suit de cette propriété que toutes les fois que la question de débouché sera de nature à influencer sur le tracé de la voûte, on devra soit adopter la forme parabolique, soit, en traçant le cintre en anse de panier, choisir des arcs de cercles dont la succession se rapproche plutôt d'une parabole que d'une ellipse. Le débouché parabolique est exactement mesuré par $ao . oc (1 + \frac{1}{4})$; et l'elliptique par $\frac{1}{2} ao . oc . 3.1415$, etc., ce qui donne, à peu près, le rapport de 157 à 167.

On pourrait également interpoler au moyen d'un plus grand nombre d'arcs paraboliques; la succession des tangentes *ahc*, *fig. 4*, offre un tracé qui en comporte quatre, et dans lequel on a pris pour tangente intermédiaire la tangente elliptique elle-même. On voit que cette dernière forme se rapproche tout à fait de la forme elliptique, et que rien ne serait plus simple que d'y multiplier assez les tangentes pour que leur succession formât le contour cherché, sans qu'il fût besoin de tracer autrement la courbe; on conçoit de même comment on pourrait y procéder à la division en voussoirs et au tracé des joints normaux, quand cette division serait arrêtée.

Nous concluons donc de ce que nous venons d'exposer dans ce chapitre, que quand un ingénieur aura à décrire un cintre surbaissé, il sera libre d'adopter une forme d'arche elliptique ou parabolique, ou une anse de panier, procédant à volonté de ces deux tracés; vu que les difficultés matérielles se balancent tellement qu'il ne peut être influencé par elles dans le choix qu'il est appelé à faire.

CONTACTS LINÉAIRES ET OSCULATIONS.*

Jusqu'à ce moment, nous ne nous sommes occupé des tangentes que pour apprendre à les déterminer rigoureusement. Les moyens que nous avons fait connaître se sont bornés à supposer la courbe tracée sur une surface réglée

facile à projeter, et à mener le plan tangent à celle-ci, suivant le point auquel le contact devait correspondre; la tangente cherchée provenait, ainsi, de l'intersection du plan tangent et du plan de la courbe considéré comme sécant.

Toutes les fois qu'il s'agira de mener une tangente à une courbe quelconque, on conçoit, par la même raison, que si l'on parvient à ramener cette courbe à faire partie d'une surface connue, le problème se trouvera encore résolu par la recherche du plan tangent si cette courbe est plane; et, si elle est à double courbure, en remplaçant le plan sécant par le plan tangent à la deuxième surface qui constitue alors la surface sécante.

On sait, aussi, que dès qu'on peut regarder la courbe donnée comme décrite par un point, en vertu de certaines forces, en déterminant leur résultante à l'instant du parcours qui correspond au point de contact, la direction de cette force se confondra avec la tangente cherchée. Cette méthode est connue sous le nom de Roberval, premier mathématicien qui l'a découverte.

A défaut de ces deux moyens d'obtenir exactement les tangentes, on est presque toujours réduit aux procédés d'interpolation, nous allons les décrire sommairement :

Par un point donné sur une courbe quelconque mener une tangente à cette courbe. — On prendra ce point comme pôle et on mènera une suite de rayons vecteurs allant aboutir à la courbe dans sa partie la plus rapprochée, à droite et à gauche du lieu de contact; on coupera ces rayons, suffisamment prolongés, par une droite qui puisse les rencontrer tous; sur la direction de chaque rayon on portera, à partir de la droite, prise pour axe des erreurs, la corde correspondante qu'il détermine sur la courbe, en ayant soin de placer dans le sens positif de l'axe les cordes situées d'un même côté du point de contact et les autres dans le sens négatif; réunissant, enfin, par une interpolation, soit régulière, soit arbitraire, les extrémi-

tés des ordonnées polaires ainsi placées, le point où la courbe d'interpolation coupera l'axe appartiendra à la tangente cherchée, puisqu'il correspondra au rayon vecteur particulier qui détacherait de la courbe primitive un arc dont la corde se trouverait nulle.

Quand les rayons vecteurs sont trop divergents, on substitue à l'axe linéaire un axe courbe : on peut supposer, par exemple, que l'axe linéaire s'est transformé en cercle autour du pôle pris pour centre. Cette modification ne change évidemment rien à l'esprit et à la rigueur du tracé qui se trouve nécessairement ramené à des dimensions plus favorables.

Mener la tangente qui passe par un point donné extérieurement à une courbe quelconque.

On prendra encore ce point pour pôle ; et on tracera une suite de rayons vecteurs qui devront se succéder dans le sens où les arcs détachés par eux, sur la courbe, diminuent de grandeur en passant de l'un à l'autre, et finissent par s'annuler ; il faut s'arrêter toutefois à celui de ces rayons qui donne la dernière corde à intersections distinctes. Cela fait, on joindra par une courbe le centre de toutes ces cordes ; et comme cette courbe ainsi limitée à la dernière corde distincte, n'arriverait pas tout à fait au point de contact, on construira, du côté où elle doit être prolongée, une suite de triangles équilatéraux, ayant chacun une des cordes pour base ; les sommets de ces triangles serviront comme points supplémentaires, à prolonger la courbe interrompue qui viendra couper normalement la proposée au point de contact cherché.

On peut, au lieu de prendre le centre des cordes, opération toujours accompagnée de quelques tâtonnements, établir haut et bas sur chacune de ces lignes le triangle équilatéral dont elle constitue la base, et opérer exclusivement l'interpolation par les sommets de tous ces triangles. On obtient, dans les deux cas, une courbe qui se

trouve normale à la proposée, parce qu'elle est normale à la direction de la corde infiniment petite qui correspond à ce même point.

Mener à une courbe quelconque une tangente qui soit parallèle à une direction donnée, se résout par le tracé précédent dans lequel il suffit d'admettre que le pôle est passé à l'infini.

La direction de la tangente et son point de contact une fois connus, la normale s'en déduit immédiatement; et, comme nous n'avons rien spécifié dans ce qui précède sur la nature de la courbe, il s'ensuit que cette méthode est tout à fait générale, et peut aussi bien s'appliquer aux courbes mathématiques, qu'à celles qui dérivent d'un tracé purement arbitraire.

Les relations de contact ne se bornent pas aux courbes et à la ligne droite; dans une infinité de circonstances les courbes ont des points communs où elles se touchent entre elles; et, non seulement elles peuvent avoir en ce point une tangente commune, mais elles peuvent admettre des rapprochements qui supposent plusieurs contacts linéaires successifs et qui se trouvent compliqués par des intersections pareillement linéaires. Nous allons signaler quelques-uns de ces cas particuliers qui se rapportent principalement aux courbes du second degré.

CONTACTS CIRCULAIRES.

Supposons un cercle infiniment petit dont le rayon augmenterait successivement, par le mouvement rétrograde du centre, opéré suivant la même droite; les circonférences diverses qui en résulteront, se toucheront toutes à l'extrémité fixe de cette ligne. Quand le rayon deviendra infini, la circonférence correspondante sera une droite perpendiculaire à la direction constante parcourue par les centres. Et, enfin, quand le rayon passera du côté négatif, il reproduira en sens contraire de la circon-

férence à rayon infini, la succession identique des cercles situés du côté positif.

Ici, les conditions de contact resteront invariables; car deux cercles différents ne sauraient avoir entre eux qu'un seul point de contact commun; ils se confondraient, s'ils se coupaient en outre suivant un second point. La démonstration de cette propriété est absolue, comme indépendante de la grandeur du rayon et de la distance qui existe entre les deux points communs.

Il est facile de reconnaître que deux courbes du second degré affecteront un contact tout à fait analogue: 1° quand elles seront semblables et semblablement placées; car généralement, dans ce cas, elles pourront être considérées comme la projection de deux cercles; 2° quand elles seront tangentes extérieurement; car, prises à part, on pourra toujours les transformer circulairement, et comme elles ne pourront avoir avec la droite qui les sépare et qui les touche qu'un contact circulaire, à plus forte raison n'auront-elles qu'un contact du même ordre l'une par rapport à l'autre.

Mais quand deux courbes sont quelconques, nous avons vu qu'elles pouvaient se trouver tangentes selon deux droites, et au même point de ces droites, sans se confondre, comme aussi avoir un contact linéaire commun et un point d'intersection également commun. Dans le premier cas, elles ont un même système de diamètre conjugué, celui qui correspond à la corde qui unit les deux points de tangence; dans le second, les deux diamètres conjugués viennent séparément passer par le centre de cette corde. Ces propriétés sont encore absolues, en tant qu'elles se trouvent indépendantes de la grandeur de la corde. Elles subsisteront donc encore quand la corde sera devenue infiniment petite ou infiniment grande, quand, par conséquent, elle sera devenue tangente, et quand les deux courbes seront de forme parabolique et semblablement placées.

La corde, dans toutes ces circonstances, est une des sécantes réelles commune aux deux courbes; or, quand on suppose que la sécante réelle représente la limite des deux plans où ces courbes sont tracées, la figure correspond alors à deux hyperboles semblables et semblablement placées, et ces courbes deviennent paraboliques dès que la sécante commune devient tangente.

Quand la sécante commune, avant de devenir tangente, réunit deux points de simple intersection, elle donne naissance à deux paraboles quelconques; la seule condition qui les lie est d'avoir leurs axes parallèles.

Quand elle unit un point de contact et un point d'intersection, les deux paraboles sont égales, mais disjointes.

Enfin, quand elle unit deux points de contact, les deux courbes ayant pour diamètre commun celui qui correspond au centre de la sécante, sont, en outre, superposées suivant leur axe principal; et dans ces deux derniers cas elles peuvent se mouvoir parallèlement à la direction de l'axe sans que les conditions de tangence soient altérées.

Il en résulte que les courbes de second degré, outre le contact circulaire, sont susceptibles de donner lieu à deux autres espèces de contacts que les cercles ne peuvent reproduire entre eux, et que les paraboles à axes parallèles ne peuvent affecter que suivant leurs branches infinies. Cette dernière propriété va nous fournir le moyen de les reproduire à volonté entre toutes les courbes du second ordre.

OSCULATION DES COURBES DU SECOND ORDRE ET DÉTERMINATION DES COURBES OSCULATRICES

Les deux tangentes qui aboutissent aux extrémités d'un arc quelconque du second ordre ab , Pl. V, fig. 5, mesurées entre leur point de rencontre commun c et le lieu du contact, sont en général inégales. Comme c'est en joignant le point c au milieu de la corde ab qu'on a le prolonge-

ment du diamètre conjugué à cette corde, il faudrait, pour qu'il y eût égalité dans les tangentes, que la corde et le diamètre se rencontrassent à angle droit, circonstance qui n'a lieu que si le diamètre du contact est en même temps un axe de la courbe.

Il suit de là que, pour qu'un cercle puisse avoir deux points de contacts avec une courbe du deuxième ordre, il faut nécessairement que les deux tangentes communes proviennent d'un même point situé sur l'un des axes; ce qui exige que le centre du cercle se trouve à son tour placé sur l'axe lui-même, position, comme on voit, tout à fait exceptionnelle.

Dans le cas des tangentes inégales, pour que le cercle tangent en b touche aussi la seconde tangente, en admettant que $cb = ca'$, son second point de contact devra se trouver en a' ; ce cercle coupera, par conséquent, la courbe en un point a'' compris entre a et a' et tel que la corde ba'' sera en général plus grande que ab . Par un raisonnement semblable le cercle tangent en a aura son deuxième contact en b' , et coupera la courbe en un point b'' , mais ce dernier se trouvera compris entre b et b' , et tel que la corde ab'' sera plus petite que la corde ab .

Toutes ces relations étant indépendantes de la grandeur de la corde ab , ne cessent pas d'exister quand cette corde ayant diminué par degrés insensibles, finit par devenir tangente. Nous pouvons donc en conclure qu'il existe entre un cercle et une courbe du deuxième ordre trois sortes de contacts : 1° le contact circulaire; 2° le contact qui comporte une intersection dans le lieu même où s'opère la tangence; 3° enfin le contact qui résulte de deux tangences circulaires juxtaposées sans se confondre.

Admettons que, par un procédé quelconque, nous ayons trouvé le cercle qui, placé en contact au sommet de la courbe, a dans ce point une double tangence; celui, par conséquent, qui aurait son centre au point où les deux

normales symétriques infiniment voisines situées à droite et à gauche de l'axe, viennent s'y couper; et supposons que les deux courbes ainsi placées dérivent par projection polaire de deux autres qui seraient situées sur un plan dont la limite fût tangente aux deux courbes au point qui correspond à l'extrémité de l'axe: les deux courbes ayant chacune deux branches qui concourent à l'infini, seront deux paraboles; les deux branches d'un même côté auront emporté en se séparant la tangente commune qui leur correspondait; les deux paraboles auront donc, à la fois, un même axe et une même amplitude, puisque leurs branches se rencontrent tangentielllement à l'infini; ce qui ne saurait avoir lieu sans que les deux paraboles s'y trouvent superposées; car les deux branches se trouveraient déjà parallèles en vertu de la seule coïncidence des axes.

Nous pouvons donc en conclure que deux courbes quelconques auront entre elles un double contact circulaire, quand elles pourront être considérées comme la projection polaire de la même parabole placée dans deux positions successives, et qui proviendraient l'une de l'autre par un mouvement de translation opéré dans le sens de l'axe primitif. Telle est précisément la relation que présentent entre elles deux courbes du second ordre quand elles ont un même diamètre aboutissant à un même point de tangence où est venu s'annihiler une de leurs sécantes communes qui joignait deux points de contact.

Ces remarques vont nous permettre de résoudre les problèmes suivants: mener à une courbe donnée, 1° le cercle osculateur à double tangence qui correspond à l'un des sommets; 2° une courbe quelconque ayant en un point quelconque une osculation du même genre avec la proposée, 3° le cercle osculateur à la fois tangent et sécant; 4° une courbe quelconque ayant avec la proposée un contact du même genre à la fois tangent et sécant.

Premier cas. Soit donnée, Pl. V, fig. 6, l'ellipse *oapb*,

pour avoir le cercle osculateur au sommet nous mènerons l'axe op et la tangente cd correspondants au point de contact ; considérant alors cette courbe comme une parabole ayant pour limite de son plan la tangente cd , nous chercherons de combien elle doit s'avancer dans le sens de son axe pour que sa projection devienne un cercle.

Une corde quelconque ab , parallèle à la limite, avancera parallèlement à elle-même ; et pendant le mouvement de progression, ses extrémités a et b s'appuieront constamment sur les deux parallèles ao et bo . Les deux tangentes en a et b , pendant ce mouvement, s'avanceront aussi parallèlement à elles-mêmes ; et, en projection, elles pivoteront autour de leurs limites c et d .

Nous avons donc à chercher une position de ab telle qu'en joignant ses extrémités $a'b'$ aux points c et d , les trois tangentes cd , ca' et db' déterminent un cercle. On y parvient en décrivant une circonférence de c ou d pris pour centre, avec un rayon égal à co ; le point où elle viendra couper la parallèle ao ou bo , qui lui fait face, appartiendra au cercle cherché, puisqu'il appartiendra à une ellipse dont les quatre tangentes co , od , ca' et db' se trouveront égales par construction.

Un tracé identique, sauf le cercle, exécuté pour chaque position particulière que peut prendre ab dans son mouvement de translation entre les parallèles infinies ao , bo , correspond à une nouvelle courbe osculatrice ; et il est facile de s'assurer qu'elle ne peut plus affecter la forme circulaire.

Ainsi, quand elle est parvenue à la position, où sa grandeur projective, interceptée entre les deux parallèles, se trouve égale à deux fois la distance cd , la courbe osculatrice devient une parabole. Elle donne une ellipse allongée dans le sens de l'axe de contact dans toutes les positions intermédiaires au cercle et à la parabole ; une ellipse allongée en sens contraire entre le cercle et la tangente

d'osculation, et enfin une hyperbole dans tout le reste de son parcours.

Toutes ces courbes ont un axe commun de direction, et varient seulement entre elles par la grandeur relative du second axe. On ne saurait y trouver en conséquence qu'un seul cercle, une seule parabole, une seule hyperbole équilatère, etc.

Donc, si l'on demandait de remplacer le cercle osculateur par une courbe particulière dont le rapport des axes fût déterminé, il n'y aurait qu'à placer la corde ab dans une position telle, que les deux axes de la nouvelle courbe fussent entre eux dans ce même rapport; ce qui résoudrait en partie et par interpolation le *second cas* des problèmes énoncés ci-dessus.

Troisième cas. Déterminer le cercle osculateur, à la fois tangent et sécant, à un point quelconque donné sur une courbe du second ordre.

Supposons que l'une des deux paraboles, dont nous venons de tracer la perspective, se soit écartée parallèlement à l'axe commun, le nouvel axe $p'o$ conservera même limite o , et les cordes parallèles à la limite cd conserveront leur même dimension. En se transportant dans le prolongement de leur direction première, elles formeront par conséquent le système diamétral conjugué au nouvel axe.

La figure nouvelle sera bien composée de deux paraboles identiques aux deux premières; mais on aura beau faire mouvoir la corde $a''b''$ homologue à ab , il sera impossible de lui trouver, le long du nouvel axe, une position qui détermine un cercle. Dans cette seconde représentation des paraboles, le cercle à double tangence devient donc impossible. Toutefois, si nous comparons le cercle du tracé précédent à la forme qu'il affecte dans la transformation oblique, nous reconnaissons qu'il s'y trouve figuré par une ellipse on .

Ces deux courbes représentent deux paraboles identi-

ques, dont les axes se sont écartés dans le sens de la tangente mm à leur sommet commun. Donc, par rapport à l'ellipse primitive op' , celle qui représente un cercle a éprouvé à la fois un mouvement de disjonction $p'p$ dans le sens de l'axe, puis un mouvement de translation pm . Deux courbes tangentes, à l'extrémité d'un même axe, ne peuvent se disjoindre, parallèlement à cet axe, sans qu'il existe une intersection qui se trouve située entre ces deux axes. La projection polaire ayant confondu les axes disjoints à leur point o de limite commune, y a réuni, à plus forte raison, l'intersection qu'ils comprenaient entre eux. Donc, enfin, le cercle se trouve tangent et sécant selon le point o de la courbe. Ce contact est, par rapport aux deux courbes, ce qu'est un contact d'inflexion entre une droite et une courbe; car il est facile de reconnaître qu'en redressant le cercle osculateur, suivant la tangente du point du contact o , la courbe avec laquelle il est en osculation, redressée par le même mouvement, se trouvera présenter un point d'inflexion.

Le problème se trouvera donc ramené, quand le diamètre qui correspond au lieu de contact se trouve oblique, à chercher parmi toutes les formes que la parabole peut prendre par un mouvement de translation opéré dans le sens de l'axe, celle qui est susceptible d'affecter la forme circulaire par suite d'un second mouvement de disjonction parallèle à cet axe.

Prenant donc encore une des cordes conjuguées $a'b'$, qui correspondent au diamètre passant par le point de contact o , et menant par ses extrémités les deux parallèles oa'' et ob'' , nous aurons, au moyen de ces parallèles, la grandeur relative qu'affectera la corde par suite d'un mouvement quelconque de progression dans le sens de l'axe; et si, des points limites c et d des tangentes qui proviennent de cette corde primitive, nous décrivons encore deux cercles, il faudra trouver parmi toutes ces cordes, différentes de

grandeur, celle qui, en s'avancant sur sa propre direction, pourra venir placer à la fois ses extrémités sur chacun des cercles.

On y parvient en transportant la corde primitive elle-même sur sa propre direction, jusqu'à ce que son centre coïncide avec le prolongement de la normale op du point de contact. L'une quelconque des parallèles, $b''d$, $a''c$, transportée dans cette nouvelle position, donnera, par son intersection avec le cercle en regard, la position de disjonction de la corde $a''b''$ qui détermine le cercle à la fois tangent et sécant au point o . Les autres courbes s'obtiendraient par des considérations tout à fait analogues.

DÉTERMINATION APPROCHÉE DU CERCLE OSCULATEUR
SUR UNE COURBE QUELCONQUE.

Une courbe quelconque étant donnée, et un point étant désigné sur son périmètre, si l'on voulait obtenir d'une manière approchée la courbure circulaire qui correspond le mieux à celle qu'elle offre en cet endroit; il faudrait d'abord mener la tangente correspondante au lieu de contact, ainsi que les deux tangentes qui en sont le plus immédiatement voisines; sur ces deux dernières on décrirait la parabole qu'elles déterminent; et enfin on chercherait le cercle osculateur à la parabole, et qui correspond sur cette dernière à la normale de contact. Cette parabole ne devrait être définitivement établie qu'après quelques tâtonnements; ainsi, il serait bien d'étudier les trois paraboles qui proviennent des trois tangentes prises deux à deux séparément, afin de bien s'assurer qu'on a adopté celle qui reproduit aussi parfaitement que possible la courbure de la proposée; car c'est bien plutôt ici la parabole qui est la véritable osculatrice, ou du moins qui constitue la courbe de facile tracé, au moyen de laquelle on peut suivre le plus exactement possible la courbure déterminée par une série quelconque de points successifs; propriété que nous avons déjà eu lieu d'appliquer à

la méthode générale d'interpolation par des arcs de même nature. Cette parabole auxiliaire pourrait donc encore être assujettie à passer, sur la courbe, par quatre points formant un trapèze, et dont le point donné ferait nécessairement partie.

MESURE LINÉAIRE DE LA CIRCONFÉRENCE.

Les solutions obtenues par la méthode d'interpolation fournissent, comme nous l'avons déjà vu, des résultats approximatifs dont le plus ou moins d'exactitude dépend soit de l'adresse du dessinateur, soit de la perfection des instruments qu'il est dans le cas de mettre en usage, pour décrire les diverses courbes auxquelles il se trouve conduit par les circonstances particulières de chaque tracé. On ne saurait donc se rendre compte de leur précision mathématique, puisque, bien que rigoureuses en théorie, elles cesseraient nécessairement de l'être quand on passerait à l'exécution pratique.

Nous allons donner quelques solutions d'une autre espèce qui sont également irrégulières, mais qui, se trouvant susceptibles d'être régulièrement exécutées au moyen des deux instruments de précision que comporte le tracé de cabinet, savoir : la règle et le compas, peuvent, dès lors, être considérées comme donnant un résultat final exact, sauf l'unique différence qui provient du principe adopté; différence que cette supposition permet d'évaluer en nombre.

Nous désignerons sous le nom d'empiriques ces tracés qui ne dérivent d'aucun système particulier, et auxquels on parvient d'ordinaire par tâtonnement; nous allons, en conséquence, nous borner à les décrire, en ayant soin de donner en même temps les calculs qui les justifient, et qui font connaître le degré de précision théorique auquel on peut atteindre par leur moyen.

Trouver une grandeur linéaire qui soit égale au quart de la circonférence dont le diamètre est ae .

Solution empirique : décrivez, sur ae , Pl. V, fig. 7, la demi-circonférence demandée; portez-y trois fois le rayon, pour déterminer les sommets b et c du demi-exagone $abce$; sur ae , pris pour base, construisez le sommet d d'un triangle isocèle ade , dont les deux nouveaux côtés soient égaux à la diagonale ac qui soutend deux côtés successifs de l'exagone, et forme le côté du triangle inscrit; enfin, du point b , avec un rayon égal à bd , décrivez un arc de cercle; il viendra couper la demi-circonférence en un point i tel que la corde ai , qui correspond au plus grand arc à partir des extrémités du diamètre ae , se trouvera égale au quart de la circonférence $abce$. On voit que la construction finale pourrait également s'exécuter en prenant c pour centre et cd pour rayon; ce qui permettra de vérifier, sous un certain rapport, l'exactitude de ce tracé; nous disons sous un certain rapport, vu que toute erreur qui ne produira pas une altération de symétrie dans la figure échappera à cette vérification.

Il n'y a d'autre moyen, pour justifier ce tracé, que de le traduire en chiffres. Ainsi, supposons le diamètre $ae=2$; le côté du triangle inscrit, ac sera égal à $\sqrt{3}$; l'apothegme du triangle aed sera égal à $\sqrt{2}$; et celle de l'exagone inscrit sera égale à $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. La hauteur du triangle ade se trouvant la différence de ces deux apothegmes sera exprimée par $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$. Dès lors, le rayon $bd=\text{corde } bi$

se trouvera égal à $\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3-\sqrt{6}}$.

L'arc ai se trouvant ainsi connu par les deux cordes de ses parties constituantes $ab=1$ et $bi=\sqrt{3-\sqrt{6}}$, on aura

Corde $ai = ab \cos. a + bi \cos. i$

$$= 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}(3-\sqrt{6})} + \sqrt{3-\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Réduisant et opérant les calculs, on trouve :

$$\text{Corde ai} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \sqrt{6}} + \sqrt{9 - 3\sqrt{6}} \right\} = \frac{1}{2} \{ 3.14239917 \}.$$

$$\text{Mais } \pi = \underline{3.14159265}$$

La différence, soit l'erreur commise = 0.00080652

On n'aurait donc, sur un cercle entier de 1 mètre de rayon, qu'une erreur de 16 dix-millimètres et 4 dix-millimètres pour son quart; erreur inappréciable dans le plus grand nombre de cas.

Cette solution a l'avantage de pouvoir s'exécuter entièrement au compas, c'est-à-dire au moyen de l'instrument de précision par excellence; elle est extraite de la *Géométrie du compas*, par Marscheroni, ouvrage spécial, dans lequel se trouvent une foule de tracés qui dépendent du calcul par le trait, et qui n'exigent, pour être exécutés, que l'emploi du même instrument.

Trouver une grandeur linéaire qui soit égale à la demi-circonférence dont le diamètre est gl.

Solution empirique, fig. 7 : tracez le cercle et menez-lui une tangente à l'une des extrémités *g* du diamètre donné; arrêtez d'un côté cette tangente au point *n*, où elle constitue de *n* en *g* la tangente trigonométrique de l'arc de 30°; portez sur la tangente ainsi limitée, de *n* en *p*, trois fois le rayon; et la distance *pl* mesurera la demi-circonférence cherchée.

On détermine la sécante *on* de l'arc de 30° en portant le rayon de *g* en *q*, et en élevant une perpendiculaire sur son milieu; tout cela s'exécute avec la même ouverture de compas; mais comme le reste de la figure dépend de la règle, on a réellement, ici, moins de certitude d'arriver à l'exactitude théorique. On peut remarquer que, par une espèce de compensation, cette exactitude atteint un chiffre plus élevé.

Voici les calculs qui justifient ce second tracé :

En admettant encore que le diamètre gl est égal à deux unités, on trouve :

$$pl = \sqrt{4 + (3 - \text{tang}.30^\circ)^2}. \text{ Or, } \text{tang}.30^\circ = \frac{\sin.30^\circ}{\cos.30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

substituant et effectuant les calculs, on aura

$$pl = \sqrt{4 + 9 - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{40}{3} - \frac{6}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$$

$$= 3.14153334$$

$$\text{Mais } \pi. \dots\dots\dots = 3.14159265$$

$$\text{Différence ou erreur commise} = 0.00005931$$

Si l'on voulait avoir immédiatement la grandeur de la circonférence entière, on y parviendrait par la construction suivante :

Solution empirique. : ajoutez bout à bout, 1° trois fois le rayon ; 2° deux fois le rayon projeté dans le sens de 3 à $\sqrt{10}$; 3° quatre cinquièmes du rayon ; 4° enfin, trois huitièmes du rayon ; et le total de cette addition sera la circonférence cherchée.

On obtient deux fois le rayon projeté dans le sens de 3 à $\sqrt{10}$, en construisant un triangle rectangle aob , *fig. 8*, dont les deux côtés de l'angle droit soient respectivement égaux, l'un au rayon et l'autre à trois fois le rayon ; l'hypoténuse ob s'y trouvant égale à $\sqrt{1 + (3)^2} = \sqrt{10}$, toute droite parallèle au petit côté projettera entre les deux autres dans le sens demandé. En conséquence, une perpendiculaire élevée à l'une quelconque des subdivisions o' et o'' déterminera sur ob , de d en b , ou de o en d' , la projection demandée ; il ne restera donc plus qu'à construire et à mettre bout à bout les autres termes qui composent l'addition indiquée ci-dessus. Il sera bien d'exécuter séparément les subdivisions aliquotes du rayon ; et pour ne pas être exposé à les confondre, on les placera à chacune des extrémités de l'addition. D'après ce que nous

venons d'exposer, la grandeur trouvée sera exprimée en chiffres par :

$$3 + \frac{4}{5} + \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{167}{40} + \frac{2}{3}\sqrt{10} = 6.2831851068$$

$$\text{Et sa moitié par.} = 3.1415925534$$

$$\text{Mais } \pi = 3.14159265$$

$$\text{Différence ou erreur commise} = 0.00000010$$

Cette approximation est la plus forte de toutes ; elle se trouve même poussée si loin, qu'on ne pourrait pas s'en promettre, à beaucoup près, une pareille en prenant directement la valeur de π sur l'échelle la mieux divisée ; elle excède donc toutes les exigences du tracé le plus rigoureux, eu égard à l'emploi graphique qu'on pourrait avoir à faire du résultat que ces tracés fournissent. En conséquence, sauf l'adresse du dessinateur, la solution est aussi complète qu'on peut avoir à le désirer. Nous disons : sauf l'adresse du dessinateur, parce qu'il y a dans ces opérations partielles une source d'erreur presque inévitable, et qui tient surtout à leur défaut d'ensemble et à leur multiplicité. Chacune d'elles offre un problème à part à résoudre ; et il faut que tous les résultats partiels soient exacts à la septième décimale pour que leur total, s'il est exact à son tour, atteigne à la même approximation.

Aussi, nous a-t-il semblé qu'on pourrait, sans inconvénient, se contenter d'une approximation moindre, en faisant subir à cette dernière solution les modifications suivantes :

Prenez sur ao un point p situé au quinzième de la distance ao , que nous supposerons, cette fois, égale au diamètre du cercle donné, et tout restant invariable dans le triangle aob déjà décrit, la circonférence cherchée se trouvera égale à l'hypoténuse pb . Cette grandeur

se trouvera en effet mesurée par $\sqrt{(3)^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3} \sqrt{2221} = 3.141832$; elle excédera donc la valeur de π de 0.00024.

Si, d'un autre côté, on prend l'hypoténuse nb du triangle anb dans lequel an soit égal au rayon, égal, par conséquent, à $\frac{1}{5}ao$, celle-ci se trouvera mesurée par $\sqrt{(3)^2 + (\frac{1}{5})^2} = \frac{1}{5} \sqrt{37} = 3.041381$, et en ajoutant à cette quantité un dixième du diamètre, soit $\frac{1}{5}$ de $an = nn''$, elle deviendra 3.141381, quantité qui approche de π à moins de 0.00021. Ces deux dimensions entre lesquelles se trouve par conséquent située la vraie valeur de π , se serviront au besoin de vérification mutuelle, avec d'autant plus de facilité que les subdivisions $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ procèdent toutes deux d'un commun diviseur 5, et que le partage en trois et en cinq parties peut s'obtenir directement sur la figure en faisant usage de la subdivision ternaire qui résulte de l'addition multiple dont ab se trouve le total. Voici le détail complet de cette double solution :

Prolongez ob dans le sens bo d'une portion om égale à sa propre grandeur, joignez l'extrémité m de ce prolongement au point o'' , et la transversale mo'' coupera ao au cinquième e demandé à partir du point o .

Une construction absolument identique donnera en n'' le cinquième de la portion an .

Enfin, joignez le milieu s de me au point b , et sb viendra passer aux $\frac{2}{5}$ de eo , par conséquent au $\frac{1}{5}$ de ao .

Soit donc que partant de la grandeur $bn' = bn + nn''$ on décrive un arc de cercle du point b comme centre, soit que cet arc ait pour point de départ l'extrémité du sinus $ap = \frac{1}{5}$ de ao , il faudra, si l'on a bien opéré, que les deux tracés se superposent; et, dans le cas où la figure se trouverait exécutée sur une échelle assez grande pour permettre d'apprécier les 0.000451 qui séparent ces deux arcs de cercle, ce qui suppose au moins cinquante centimètres de diamètre à la circonférence qu'il s'agit de me-

surer, il suffira de prendre exactement la moyenne entre les deux résultats, pour avoir π avec une nouvelle approximation qui s'étendra, cette fois, jusqu'aux unités décimales du cinquième ordre.

Ainsi, non-seulement ce tracé porte avec lui sa propre vérification ; mais, aussitôt que la chose devient nécessaire, il fournit un supplément d'approximation, qui, traduit en chiffres, est alors de 0.000014. Pour un cercle de 50 mètres de diamètre, l'erreur théorique s'élèverait donc à 0,7 de millimètre ; et comme les plus grands compas à verge n'atteignent pas vingt-cinq mètres de longueur, il en résulte qu'une approximation supérieure devient tout à fait superflue à défaut d'instruments graphiques qui puissent permettre de réaliser avec précision des cercles de cette portée.

Mesure d'un arc de cercle par son développement linéaire :

Premier cas. Quand le dessinateur aura à sa disposition une échelle circulaire (un rapporteur), il pourra, en mesurant l'arc par son moyen, apprécier en chiffres le rapport qui existe entre l'arc à développer et la circonférence d'où il provient ; il pourra aussi, selon la grandeur de cet arc, prendre pour terme de comparaison la moitié et même le quart de la circonférence. Une fois ce rapport obtenu, il construira, au moyen des tracés empiriques donnés ci-dessus, celle de ces trois grandeurs à laquelle l'arc aura été comparé ; et, en la projetant dans le sens indiqué par le rapport trouvé, il obtiendra le développement de l'arc cherché.

Deuxième cas. Si le dessinateur n'a pas d'échelle circulaire à sa disposition, il obtiendra le rapport de l'arc à la circonférence ou à ses aliquotes, par le même procédé de mensuration qu'on emploie pour obtenir le rapport qui existe entre deux droites : il portera, au compas, le petit arc soustractivement sur le plus grand ; il reportera

le reste fractionnaire de cette soustraction de forme nécessairement multiple sur le petit arc ; et procédant ainsi de reste en reste , par soustractions successives , il poussera son opération jusqu'à ce qu'il soit parvenu à un reste assez petit pour pouvoir être négligé. Dès lors , l'unité de la dernière soustraction se trouvant comprise exactement un certain nombre de fois dans les deux arcs , ou pouvant du moins être considérée comme telle , servira à évaluer en chiffres leur longueur respective , et par conséquent à établir graphiquement sur deux conjuguées le sens du rapport cherché.

Pour évaluer un arc au rapporteur avec une certaine exactitude , on pourra construire sur l'arc même à mesurer , et à partir de la dernière subdivision entière que l'échelle circulaire est susceptible d'y indiquer , un nonius auxiliaire , soit une portion d'échelle circulaire , divisée en dix portions égales , et dont l'ensemble comprendra neuf des plus petites divisions que présente le rapporteur.

Si l'instrument était disposé de manière à porter lui-même le nonius , il dispenserait de ce supplément de tracé et comporterait une appréciation de lecture encore plus parfaite , vu que la division des instruments , quand elle est exécutée par des procédés mécaniques spéciaux , l'emporte de beaucoup en exactitude sur celle que l'artiste le plus habile peut opérer à la main sur le papier.

Nous allons compléter ce qui concerne le cercle , en donnant les moyens les plus simples de diviser un arc en trois parties égales.

La division d'un arc ou d'un angle , ce qui revient au même , est encore un de ces problèmes que l'on ne peut résoudre , en général , qu'approximativement , et dans lesquels le calculateur , tout en restant maître du degré d'approximation qu'il désire atteindre , ne peut jamais cependant arriver à l'exactitude théorique. Toutefois , la division binaire d'un arc se ramène , comme on sait , à

élever une perpendiculaire sur le milieu de sa corde ; cette solution est donc tout à fait exacte, dans le sens relatif que nous avons attaché à ce mot.

Quand la division est ternaire, il existe, pour résoudre ce problème, une méthode de tracé susceptible d'une très-grande approximation, et telle que chaque répétition partielle conduit à un résultat plus exact que le précédent, ce qui constitue une espèce de solution par série ; comme la convergence en est très-rapide, après deux ou trois répétitions, il devient à peu près impossible d'apprécier la correction qu'une répétition de plus apporterait à la grandeur trouvée.

Préparation : Ayant à prendre le tiers d'un angle quelconque asb , Pl. V, fig. 9, du sommet s on décrira un arc arbitraire abl (si c'était l'arc ab qui fût donné, l'angle s'en suivrait, en joignant ses extrémités au centre) compris entre ses côtés, et qu'on prendra pour mesure de sa grandeur angulaire ; on prolongera un des côtés sb au delà du sommet s , et on lui élèvera une perpendiculaire sd à ce même point. Le tracé ainsi préparé, prenez, à vue d'œil et sans tâtonnement, de s en d , une grandeur qui approche de la corde qui sous-tendrait les deux tiers de l'arc ab ; du point d , comme centre, avec un rayon égal au diamètre du cercle auquel appartient ab , coupez en f le côté prolongé ; menez la droite fa : elle viendra rencontrer la perpendiculaire élevée en s en un point d' qui donnera avec plus d'exactitude la grandeur sd' de la corde des deux tiers de l'arc ab . Répétez identiquement, par rapport à d' , puis par rapport à d'' , etc., la construction soulignée, et vous obtiendrez bientôt un degré d'approximation que vous ne pourrez dépasser, vos instruments n'étant plus susceptibles de vous faire apprécier la dernière des erreurs commises.

Cette solution pourrait donc, en quelque sorte, rentrer dans la classe de celles qu'on appelle exactes ; car elle pos-

sède l'avantage dont jouissent ces dernières, qui consiste en ce que la règle et le compas ne sauraient y signaler les défauts d'exactitude, inhérents à toute exécution matérielle.

Au reste, pour faire apprécier sa convergence, il suffit de remarquer qu'en prenant la première corde arbitraire égale à zéro, ce qui revient à faire coïncider le point d avec le point s , et ce qui suppose, par conséquent, une première erreur égale à la totalité de la grandeur cherchée, on n'augmente pas d'une manière sensible le nombre des répétitions, et l'on arrive presque aussitôt à la limite d'exactitude que le tracé ne peut dépasser.

Cette solution assez remarquable n'est point empirique; elle correspond à une figure mathématiquement exacte, mais qui, ne pouvant s'exécuter directement avec la règle et le compas, rentre, par cela même, dans la classe des interpolations.

En voici l'explication théorique : le problème primitif peut être facilement ramené à faire passer par le point a une droite, dont la partie interceptée entre les deux axes rectangulaires sf et sd soit exactement égale au diamètre du cercle abl ; car, cette condition une fois remplie, en joignant le point s au centre h de la partie interceptée, on forme un triangle isocèle dont l'angle extérieur $ahs = 2af'b$. Comme cet angle a , par construction, son sommet h situé sur la circonférence abl , il est mesuré par la moitié de l'arc al ; donc, sa moitié $af'b = \frac{1}{4}abl$, et à cause de $lsb = hsf' = hf's$, $af'b = \frac{1}{3}asb$. Par suite la ligne hn étant dans le cercle abh , le sinus de l'angle $hf'n$, $d''s$, qui se trouve le double de ce sinus, sera la corde de l'arc double, soit des $\frac{2}{3}$ de ab .

Cette interpolation, que le précédent tracé effectue si complètement en faisant usage du compas, pourrait s'exécuter au besoin avec la règle seule : il suffirait de faire mouvoir une règle à biseau autour du point a jusqu'à ce que

le diamètre de l'arc ab , qu'on aurait préalablement marqué sur son tranchant, vint s'appuyer par ses deux extrémités sur les deux axes sf et sd . On y parviendrait également en assujettissant le rayon à s'appuyer par ses extrémités et sur le cercle hab et sur la ligne sf ; ce dernier procédé est même le plus convenable, toutes les fois que la grandeur de l'angle à subdiviser n'excède pas un droit.

On pourrait, enfin, construire la courbe enveloppe qui se trouve décrite par le diamètre générateur, exécutant son mouvement complet entre les deux axes sur lesquels appuient ses extrémités; courbe composée de quatre branches symétriques, et présentant quatre points de rebroussement situés, deux à deux, sur chacun des axes. En lui menant une tangente du point a , le problème se trouvera encore une fois résolu; et comme il est possible de lui mener, en outre, par ce point, les deux tangentes am et ag , chacune d'elles nous fournira une nouvelle solution: am viendra couper sd en un point d''' qui donnera la grandeur de la corde sd''' des $\frac{2}{3}$ de l'angle asf , c'est-à-dire du supplément de l'angle donné; et ag donnera sur sm la corde homologue de son complément.

Il arrive ici ce qui a toujours lieu quand, en résolvant un problème, on s'y prend de manière à lui conserver sa généralité: on obtient immédiatement toutes les solutions que ses données peuvent admettre.

En construisant cette courbe enveloppe, on peut remarquer que le cercle $ablh$ occupe les points milieu de la droite mobile dans ses diverses positions, et que tous les autres points de cette même génératrice, situés soit sur sa partie constante, soit sur son prolongement indéfini, décrivent à leur tour une suite d'ellipses. Cette propriété devient évidente dès que l'on regarde la figure comme une projection polaire. Il va nous être facile d'y reconnaître la perspective du conoïde à double base circulaire, dans le cas particulier où le tableau contiendrait la directrice li-

néaire, et où l'œil se trouverait placé au centre de l'un des deux cercles directeurs. La suite des ellipses représente alors les diverses sections de la surface, par une série de plans parallèles au tableau, y compris, comme cas particulier, les cercles directeurs et les deux droites directrices, ces dernières correspondant sur la surface à deux ellipses dont le petit axe s'est évanoui.

Ce conoïde est une surface réglée, dont la génératrice mobile est assujettie à s'appuyer constamment sur une droite et sur une circonférence données, tout en restant parallèle à un plan fixe : génération conforme à celle du paraboloides, avec cette seule différence que l'une des directrices linéaires de la surface du second ordre se trouve ici remplacée par une circonférence, et que le conoïde ne saurait avoir qu'un seul plan directeur.

En admettant que la circonférence directrice se trouve située dans le plan parallèle au tableau qui passe par l'œil, et que nous nommerons *plan par l'œil*, cette surface comporte une description remarquable par sa simplicité, et surtout par l'usage que les géomètres anciens ont fait des diverses courbes auxquelles elle donne alors naissance ; car ils ont, par son moyen, ramené la solution des problèmes qui dépassent le second degré à une interpolation par la droite et le cercle.

La simplicité de description du conoïde tient, dans cette circonstance particulière, à ce que la perspective de toute droite $a \cdot b$ rencontre le plan par l'œil à une distance de ce dernier point qui se trouve égale à ab , comme parallèle comprise entre parallèles ; il s'ensuit que, pour assujettir un nombre quelconque de droites à venir percer le plan par l'œil suivant une même courbe, il suffit de donner à chaque perspective, mesurée entre la trace et la limite, une grandeur égale au rayon vecteur qui fait partie de son plan projetant, et qui, partant de l'œil, vient aboutir à cette courbe, et par conséquent des grandeurs

égales au rayon quand l'œil occupe le centre d'un cercle directeur, et aux cordes qui dérivent d'un même point quand il est placé sur la circonférence.

La plus élégante de toutes les projections de ce genre de surface correspond au cas particulier dans lequel, l'œil occupant le centre du cercle directeur, la directrice se trouverait sur le tableau. Alors la surface, dont la limite *ab*, *fig. 10*, est toujours linéaire, a, comme le paraboloïde dans une circonstance semblable, une autre droite unique *cd* pour trace. Chacune de ses génératrices mobiles *ef*, *gh* est figurée par une ligne de grandeur constante qui s'appuie à la fois sur la trace et sur la limite. Cette seule condition suffit pour les déterminer.

Toute section parallèle au tableau y produit une ellipse; et de plus, quand il arrive que la trace est perpendiculaire de direction à la limite, comme *ds* et *fm* dans la *fig. 9*, la surface étant alors composée de deux nappes égales par rapport à sa directrice (à sa ligne de striction), le plan symétrique au plan de l'œil donne un cercle identique *abl*, occupant sur le tableau le centre de toutes les génératrices, et ayant en perspective un rayon exactement sous-double de sa véritable grandeur dans l'espace.

Nous venons de voir que ce cercle est lié aux perspectives des éléments linéaires de la surface par une propriété du genre de celles dont les anciens géomètres ont si bien tiré parti : toute génératrice le rencontre en deux points sur le tableau ; et en soustrayant la portion d'arc *ah*, *ac*, *ag* qu'une d'elles sous-tend, les deux portions qui restent d'un même côté du plan directeur sont exactement entre elles dans le rapport de 3 à 1 ; la portion sous-triple correspondant au point réel d'intersection du cercle et de la droite, et par conséquent au centre de sa dimension constante, et l'arc triple à celui où la même génératrice perce le cône dont ce cercle est la perspective.

Cette propriété fait du conoïde la surface la plus con-

venable pour obtenir la division ternaire d'un arc, puisque chaque génératrice y donne une solution particulière de ce problème. En appliquant ces remarques aux trois solutions indiquées ci-dessus, il est évident qu'elles se réduisent chacune à mener par a la génératrice du conoïde qui a fin pour trace, ds pour limite, et $habl$ pour cercle symétrique à son cercle directeur; ou bien encore du conoïde inversi, celui dont la trace se trouve superposée à la limite du premier, et réciproquement.

Quand, au moyen de cette figure, il s'agit de tripler un arc hn' , on y parvient par la ligne droite et le cercle, et sans employer d'autre ouverture de compas que celle du rayon hf' de l'arc décrit, vu que l'on part alors d'un point connu h sur la surface, et qu'on trouve immédiatement et d'une seule ouverture de compas un second point f' de la génératrice correspondante.

Mais, pour procéder à l'opération inverse, il faut trouver quelle est celle des génératrices du conoïde qui rencontre une génératrice $a * a$ donnée sur le cône; et l'on ne peut plus y parvenir que par tâtonnement, c'est-à-dire par interpolation, bien que la construction n'exige qu'une droite et un cercle. Mais comme, parmi tous les procédés d'interpolation, on doit évidemment préférer ceux qui ne mettent en œuvre que le cercle et la droite, il est clair que le conoïde devait se trouver la surface la plus propre à conduire à des résultats de ce genre, et c'est ce qui rend si remarquable le choix fait par les anciens géomètres des courbes qui proviennent directement de cette surface pour les appliquer à leurs recherches.

Il est facile de passer des deux cas particuliers que nous venons de discuter au cas plus général dans lequel la ligne directrice ne serait plus parallèle au plan du tableau et du cercle directeur. Nous nous contenterons d'en citer deux exemples qui se rattachent précisément à la

conchoïde et à la cissoïde, deux des principales courbes inventées par les anciens géomètres, pour résoudre par l'interpolation de la ligne et du cercle les problèmes auxquels ne pouvaient s'appliquer le procédé rigoureux.

Puisque nous sommes libres de donner à la directrice une position quelconque, examinons le cas où elle vient passer par l'œil, celui-ci occupant toujours dans le plan par l'œil le centre de la circonférence directrice. La perspective de la directrice se note $a \cdot a$, et se réduit au point a , par lequel devront alors passer les perspectives de toutes les génératrices; et, comme celles-ci doivent encore se trouver constantes de grandeur, il s'ensuit qu'il suffira de mener par le point a , *fig. 11*, une ligne quelconque, et de mesurer sur sa direction, à partir du point où elle viendra rencontrer la limite linéaire de la surface, et de chaque côté de cette ligne cv , deux grandeurs égales au rayon du cercle directeur, pour déterminer à chaque fois deux génératrices, et, par conséquent, deux points de la trace du conoïde. La courbe qu'on obtient dans cette circonstance a reçu le nom de *conchoïde*, à cause d'une sorte de ressemblance avec les deux portions d'une coquille.

Tout restant conforme aux suppositions précédentes, admettons encore que l'œil, entraînant avec lui la directrice, vienne se placer sur la circonférence du cercle directeur dont il occupait le centre; les génératrices viendront bien encore passer par le point a où se projettera la directrice, mais leur grandeur ne sera plus constante; et il faudra trouver, pour chacune d'elles, *fig. 11*, la longueur de la corde am que son plan projetant détermine dans le cercle directeur, ce qui s'obtient en projetant ce cercle lui-même, amn , sur le tableau par des ordonnées parallèles à $a \cdot a$; les directions des cordes ma s'y confondent alors avec celles des génératrices qui leur correspondent; et il ne s'agit plus que de porter sur ces dernières, à partir de la limite du plan directeur de v en n ,

la grandeur am que le cercle intercepte sur elles. La courbe nommée cissoïde correspond au cas particulier de cette figure dans lequel la limite du plan directeur est éloignée du point a d'une distance égale au diamètre du cercle directeur.

En variant les données indiquées ci-dessus, on obtiendra toutes les formes diverses que comporte la section plane d'un conoïde, et principalement la droite, deux droites parallèles, deux droites formant un angle, le cercle, l'ellipse, la conchoïde, la cissoïde, etc.

Puisque nous avons donné le procédé de trisection qui se rapporte au conoïde, il nous reste à faire connaître comment les anciens obtenaient de la même surface deux moyennes proportionnelles successives entre deux termes donnés. Supposons ces deux termes oa et ob dans un rapport sous-double, ce qui correspond, comme on sait, au problème de la duplication d'un cube.

Leur solution consistait à placer, *fig. 11*, les deux termes du rapport, à partir de l'origine o , sur deux conjuguées rectangulaires oa et ot ; à décrire du point o un cercle avec le plus grand des deux termes pour rayon; à mener de l'extrémité c du diamètre aoc la ligne bl ; et enfin, par l'autre extrémité a , à mener une ligne telle que sa partie lp , comprise entre la droite lc et la circonférence, fût exactement divisée en deux par sa rencontre avec la conjuguée og . Il ne restait plus alors qu'à mener par b une parallèle à la direction ap , et le segment eo déterminé par cette parallèle donnait le côté d'un cube double en volume de celui qui aurait été construit sur ob .

Nous pouvons démontrer l'exactitude de ce tracé, en le comparant à celui qui, dans la partie élémentaire de cet ouvrage, correspond à l'élévation aux puissances : joignons le point e au point g , la droite eg sera parallèle à as , comme complétant un triangle de section egb dans la projection d'une pyramide als , c , dont la base als a

déjà deux côtés al et ls respectivement parallèles à eb et bg . D'une autre part, l'égalité des arcs st et tp établit l'égalité des deux angles ago et sao ; par conséquent, les quatre transversales be , eg , ga , as , sont antiparallèles par couple, si on les compare aux deux conjuguées oa et ot ; donc, elles y déterminent la progression géométrique $ob : oe : og : oa$, etc. Donc, enfin, si nous prenons ob pour unité, og mesurera la seconde puissance de oe , et oa mesurera son cube; et comme oa est, par construction, le double de ob , il s'ensuit que les cubes correspondants à oe et à l'unité auront des mesures linéaires exactement sous-doubles, et que leurs volumes seront entre eux dans le même rapport.

Il suffirait de rabattre en *ecr* le triangle rectangle egc , pour rétablir le trapèze $berc$ à deux angles droits successifs, dont nous avons déjà indiqué la construction, page 30, pour résoudre ce même problème des deux moyennes proportionnelles successives entre deux termes.

Nous n'avons pas besoin de faire remarquer que l'égalité des segments lg et gp , à laquelle on ne peut parvenir que par tâtonnement, détermine l'égalité de la corde ap et de lq ; que, par conséquent, la génératrice $l \cdot q$ correspond au conoïde qui a pour trace la cissoïde $altu$, et que l'interpolation se réduit ainsi à trouver le point l où la droite cb perce cette trace superficielle.

Le conoïde étant la plus simple de toutes les surfaces réglées, après celles du second ordre, devient l'auxiliaire presque obligé de toute interpolation supérieure: rapportons-nous, par exemple, au procédé décrit, page 182, pour mener une tangente à une courbe quelconque; et on verra bientôt qu'il revient à exécuter le tracé d'une cissoïde irrégulière ou de la trace d'un conoïde auquel la courbe donnée servirait de directrice, et dont le plan directeur serait choisi de manière à pouvoir se trouver coupé par la trace superficielle: leur point d'intersection appartient à

la génératrice mobile qui vient passer par l'œil, en même temps que la directrice linéaire; dès lors le plan qui passe par ces deux droites est tangent à la surface au point où ces droites se rencontrent; donc sa trace, sur le plan par l'œil, doit se trouver tangente à la section que ce dernier produit dans la surface, c'est-à-dire à la courbe proposée elle-même.

Nous ne saurions mieux terminer ce que nous avons à dire sur l'interpolation graphique, qu'en faisant connaître un des moyens de faire passer une courbe unique par six points: ce sera tout à la fois mettre le lecteur à même de juger des complications introduites dans ce genre de problème par une seule condition de plus, et lui faire apprécier en même temps les ressources que présente le conoïde, comme surface interpolatrice.

On pourra toujours, en effet, disposer extérieurement aux six points donnés un conoïde à trace et à limite linéaires, de façon que chacun des six points puisse se trouver sur le prolongement d'une des génératrices mobiles de la surface, et en avant de sa ligne de striction (de la trace linéaire); dès lors, en construisant six de ces génératrices (il en existe douze qui satisfont, deux à deux, à cette condition), chacun des points pourra se trouver assujetti à faire partie de la droite qui lui correspond, et par conséquent à se trouver sur une des nappes de la surface à laquelle ces droites appartiennent. De plus, ces six points ainsi placés pourront également être réunis deux à deux par trois droites qui seront, à leur tour, déterminées par la condition de s'appuyer chacune sur les deux génératrices du conoïde auxquelles appartiennent les deux points particuliers d'où elles proviennent. Mais trois droites déterminent toujours un hyperboloïde réglé; donc, les six points seront assujettis à se trouver à la fois sur les deux surfaces, et feront ainsi partie de leur intersection commune; il n'y aura qu'à

construire cette courbe, pour satisfaire complètement aux conditions du problème qu'on s'était proposé : on y parviendra en construisant séparément soit l'intersection d'un nombre quelconque de génératrices du conoïde avec la surface gauche, soit l'intersection des génératrices de la surface gauche avec le conoïde ; ce qui se réduira pour chacune d'elles à une épure élémentaire. Si l'on voulait, de plus, obtenir la tangente en un point donné, il faudrait déterminer l'intersection des plans tangents qui correspondent à ce point sur les deux surfaces. Celui de la surface gauche est connu ; et quant à celui du conoïde, il devra contenir et la génératrice correspondante, et la tangente à l'ellipse donnée par un plan parallèle au tableau qui passerait par ce point, conditions qui suffisent pour le déterminer. Cette interpolation, sauf la longueur de l'épure, est donc aussi complète que celles que nous avons déduites des sections planes opérées dans la surface du second ordre ; on va juger de sa fécondité : nous avons déjà remarqué que, par rapport au même conoïde, les six points donnés pouvaient chacun occuper deux positions différentes : l'une sur la partie vue, et l'autre sur la partie cachée de la surface. Or, douze points combinés deux à deux donnent naissance à soixante-six droites ; sauf les doubles emplois, il est facile d'apprécier par là le nombre de courbes régulières qui sont susceptibles d'être produites par le même tracé. Ce serait au dessinateur à choisir des données qui fussent dans le cas de satisfaire le mieux possible au but principal qu'il se proposerait d'atteindre en opérant ainsi la réunion des six points donnés.

Il est évident qu'un cône disposé de manière à ce que les mêmes six points fussent assujettis à se trouver à la fois sur une de ses nappes, pourrait encore ici remplacer avantageusement le conoïde. On sent que si les points se trouvaient sur deux nappes différentes, tant sur le conoïde

que sur le cône, la courbe d'intersection aurait nécessairement un point singulier si le sommet du cône ou la ligne de striction du conoïde touchait ou rencontrait l'hyperboloïde sécant, et deux branches séparées dans le cas contraire.

Toutes ces considérations ne sont ici mentionnées que pour bien faire apprécier la portée de la méthode que nous avons à exposer; mais, comme il est assez difficile de prévoir le cas où l'on pourrait avoir à faire passer une courbe unique par six points donnés, et où il serait absolument interdit d'y procéder au moyen d'une suite d'arcs paraboliques tangents, nous avons dû nous borner à indiquer la solution la plus générale de ce problème, sans avoir à exposer les simplifications que l'exécution matérielle de l'épure pourrait comporter. C'est aussi à ces dernières considérations que se bornera la partie de cet ouvrage consacrée à l'interpolation graphique.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATION DES PROCÉDÉS DU CALCUL GRAPHIQUE A LA SOLUTION DE DIVERS PROBLÈMES DE STABILITÉ.

Ce titre correspond à une section tout entière du calcul par le trait dont la partie élémentaire bien connue a déjà été publiée depuis longtemps. Nous ne chercherons pas, en conséquence, à reproduire ici sous une autre forme la théorie de la statique géométrique développée par Monge avec tant d'élégance et de simplicité; nous n'aurons, dans ce qui va suivre, qu'à nous en référer aux constructions et aux principes consignés dans cet ouvrage, comme nous l'avons déjà fait, dans ce qui précède, par rapport aux éléments de géométrie pure.

Nous ferons, toutefois, précéder cette quatrième partie de quelques remarques préalables destinées à en faciliter l'intelligence :

Dans les éléments de statique, les forces sont invariablement représentées en grandeurs linéaires; tandis que, pour résoudre les problèmes qui composent la présente section, nous aurons fréquemment occasion de les considérer comme représentées par des grandeurs superficielles; et on conçoit qu'il pourrait arriver telle circonstance où il conviendrait de les représenter par des grandeurs cubiques. Les considérations développées dans les sections précédentes justifient suffisamment l'emploi de ces moyens divers de représentation; puisque nous serions toujours libres d'exprimer linéairement ces grandeurs cubiques ou superficielles, ce qui ramènerait la représentation des forces à la forme spécialement consacrée par les éléments de statique.

En conséquence, pourvu que nous ne perdions pas de

vue les conditions qui lient chaque force à son signe représentatif, nous serons libre d'employer celui de ces signes qui se prêtera le mieux au genre de démonstration que nous aurons adopté. Il convient de rappeler encore, à ce sujet, que dès que l'on représente une force par une surface ou par un cube, la direction dans laquelle cette force agit passe nécessairement par le centre de gravité de l'ensemble superficiel ou cubique qui lui correspond.

Aussi les considérations de force donnent-elles un moyen très-simple d'indiquer la position du centre de gravité d'un triangle et d'un quadrilatère.

Composez deux côtés d'un triangle, son centre de gravité se trouvera au tiers de leur résultante, à partir du point d'application commun.

Composez les quatre segments des diagonales d'un quadrilatère, envisagés deux à deux comme des forces opposées de direction, son centre de gravité se trouvera au tiers de leur résultante, à partir du point d'application commun. C'est en abrégé la formule déjà donnée, p. 103.

Quand deux surfaces pesantes, c'est-à-dire, donnant la mesure d'une force, agissent aux extrémités des bras d'un même levier, pour qu'il y ait équilibre entre elles il faut, comme on sait, que chaque surface multipliée par le bras correspondant donne un produit identique; ce qui revient à dire que les cubes qui auraient ces surfaces pour base et ces bras de levier pour hauteur, seraient équivalents entre eux. Donc, dans un même parallépipède rectangle, chaque face prise pour force, et chaque hauteur correspondante prise pour bras de levier, donneront des moments égaux; et, de plus, cette égalité de moments ne cessera pas d'exister dans tous les changements rectangulaires que le parallépipède pourra subir tout en conservant le même volume. Quand les forces seront représentées en grandeurs linéaires, l'égalité des moments se

réduira, par une raison semblable, à une équivalence de surface.

Moyennant ces explications, il va nous être permis d'aborder immédiatement les questions suivantes, dont la solution va dépendre de l'art du trait appliqué à la mécanique.

On demande quelle est l'épaisseur qu'il convient de donner à un mur dans les différents cas où ce mur aurait à résister 1° à la pression exercée par un liquide parfait ; 2° à la même pression dépendant d'un liquide imparfait ; 3° à l'effort de poussée d'une masse de terre dont les éléments une fois rapprochés seraient susceptibles de cohésion ; 4° à l'effort de poussée d'une voûte en berceau ; 5° à l'effort simultané d'un liquide et d'une voûte.

On peut remarquer d'avance que, dans toutes ces questions, la longueur du mur peut être négligée ; il suffit, pour cela, de la supposer constamment ramenée à l'unité linéaire. Chacun de ces problèmes se trouvera réduit, par conséquent, à trouver la surface transversale que doit offrir le mur cherché ; cette dernière étant considérée, tout à la fois, comme supportant la pression et obéissant à la pesanteur.

CAS DES LIQUIDES PARFAITS, SOUMIS A LA LOI D'ÉGALITÉ DE PRESSION, ET S'ÉCOULANT EN TOTALITÉ SUR UNE SURFACE HORIZONTALE.

Nous allons d'abord résoudre la question qui nous occupe, en supposant au mur la même pesanteur spécifique que celle du liquide qu'il a à soutenir, ou, en d'autres termes, en admettant que le mur est une portion solidifiée de ce liquide, ce qui nous donnera une épaisseur applicable à un liquide quelconque. Nous indiquerons ensuite comment on passe de cette solution spéciale à celle qui correspond à un liquide, et à un mur de nature également arbitraire.

Soit ah (Pl VI, *fig. 1*) la hauteur d'un mur qui doit

faire équilibre à une lame de liquide indéfinie ah AH . Cette lame exercera au point h une pression nulle, puisque sur toute la ligne hH les molécules sont en équilibre, et n'ont à transmettre aucune pression qui ne soit équilibrée. Au point a la pression, exercée perpendiculairement au mur, sur l'élément linéaire de surface, sera égale à celle que supporte en ce point le fond même du réservoir, égale, par conséquent, au poids d'une colonne de liquide d'une hauteur ah ; et généralement la pression en un point quelconque situé le long de ah , sera mesurée par une colonne de liquide égale en hauteur à l'enfoncement de ce point au-dessous du niveau supérieur. Si l'on construit, en conséquence, sur ah un triangle isocèle rectangle haA ; si l'on suppose en outre les diverses tranches de ce triangle rendues solides comme le mur, et sollicitées par une force de direction horizontale, et identique du reste à la pesanteur, les éléments superficiels de ce triangle exerceront sur la ligne ah le même effet de pression qu'exerçait la tranche liquide. Nous pourrions donc substituer son action à celle que nous avons à considérer.

Le problème se trouve ainsi ramené à déterminer un rectangle pesant, ayant ah pour hauteur, et tel que le moment de son poids, autour de son angle extrême de base b , soit équivalent au moment du triangle que nous venons de déterminer, pris par rapport au même point, et en supposant la surface de ce dernier soumise à l'action de la pesanteur dirigée dans le sens horizontal.

Le moment du triangle sera égal à sa surface (égale elle-même à la moitié du carré construit sur ah), multipliée par la perpendiculaire abaissée du point de rotation sur la résultante des forces qui le sollicitent, soit une horizontale passant par son centre de gravité: ce qui donne $\frac{1}{3}$ de ah pour la valeur de ce bras de levier perpendiculaire; et $\left(\frac{ah}{2}\right) \times \frac{ah}{3}$ pour l'expression cubique du moment

cherché que nous pouvons encore exprimer en facteurs linéaires, par $(ah) \times \frac{ah}{3}$, en adoptant $\frac{1}{3} ah$ pour unité de mesure de la surface triangulaire.

D'un autre côté le moment du mur cherché, pris par rapport au même point, est égal à la surface rectangulaire de son profil, multipliée par un bras de levier égal à sa demi-épaisseur; mais si, pour rendre les deux forces comparables, on rapporte cette surface à la même unité linéaire, soit à la moitié de sa hauteur, elle sera mesurée par deux fois l'épaisseur cherchée, donc ce moment se trouvera exprimé à son tour en facteurs linéaires par $(2x) \times \frac{x}{2}$; et en exécutant la multiplication, la mesure superficielle de ce moment sera donnée par (x^2) , soit une surface égale au carré construit sur l'épaisseur cherchée.

En comparant les deux moments obtenus, on voit que, pour qu'il y ait égalité entre eux, il faut que le carré construit sur l'épaisseur cherchée soit égal au tiers du carré construit sur ah .

On obtiendra donc l'épaisseur du mur fictif, en construisant une moyenne proportionnelle entre ah et $\frac{1}{3}$ de ah .

Ce qui revient à porter $\frac{ah}{3}$ de a en c , et à construire un demi-cercle sur Ac , pris pour diamètre. L'ordonnée correspondante au point a donnera de a en a' l'épaisseur cherchée, que nous appellerons épaisseur *normale* et qui correspond ici au cas d'équilibre strict.

Ayant ainsi l'épaisseur du mur fictif de pesanteur spécifique équivalente à celle du liquide, dimension entièrement indépendante de la pesanteur du liquide que l'on considère, et qui, par conséquent, s'obtient dans tous les cas par un tracé identique, et dans lequel il n'y a de variable que la hauteur ah du mur, pour en déduire l'épaisseur d'un mur réel en maçonnerie de même hauteur et

de résistance équivalente, il va nous suffire d'avoir égard à la différence de pesanteur spécifique qui existe entre le mur fictif que nous venons de déterminer, et le mur réel qu'il s'agit de lui substituer.

$P = Ab'$ étant en grandeur linéaire celle du liquide, soit $p = aA$ celle du mur réel à construire.

Il est clair que nous arriverions à un résultat identique, si d'un côté, sans rien changer au poids élémentaire primitif, nous augmentions la hauteur du rectangle normal dans le rapport donné $P : p$, et si, de l'autre, la surface restant invariable, nous admettions, comme nous avons à le faire, que sa pesanteur spécifique fût augmentée dans le même rapport. Nous pouvons donc substituer au mur cherché un troisième mur dont la pesanteur spécifique P n'aura pas varié, mais dont la hauteur, comparée avec ah , serait égale à celle-ci projetée dans le sens de P à p ; car, à base égale, ces deux derniers murs étant de même poids présenteront des moments identiques.

En adoptant toujours pour unité de mesure $\frac{1}{2} ah$, le moment superficiel du troisième mur sera égal, d'après ce que nous avons déjà exposé, à autant de fois le carré construit sur son épaisseur que la hauteur ah est contenue dans sa propre hauteur : égal par conséquent à la surface x'' , en appelant x' l'épaisseur cherchée, projetée dans le rapport $P : p$. Ce moment superficiel, pour qu'il y ait équilibre, doit être équivalent à celui du mur fictif, lequel, par la même raison, se trouve mesuré à son tour par le carré x' construit sur sa propre épaisseur, que nous avons appelée épaisseur *normale*. Donc, enfin, en projetant ce dernier carré dans le rapport inverse $p : P$, nous obtiendrons la surface qui se trouve égale à x'' . Mais, pour projeter un carré dans les termes qui constituent un certain rapport, il suffit de projeter son côté dans le rapport des racines carrées des deux termes donnés; et, comme la grandeur obtenue par la construction qui résout

ce dernier problème est précisément le côté d'un carré équivalent à la nouvelle surface, il s'ensuit qu'on trouvera immédiatement l'épaisseur x' cherchée en projetant l'épaisseur normale x dans le rapport inverse des racines carrées des deux pesanteurs spécifiques, soit dans le sens de $\sqrt{p}$ à $\sqrt{P}$.

Nous avons indiqué dans les éléments le tracé particulier qui résout ce problème : il consiste à construire un demi-cercle sur la somme Ab' des deux termes p , P qui figurent dans ce rapport, et qu'on traduit pour cela en grandeur linéaire ; à élever une ordonnée au point a où les deux termes s'aboutent ; à prendre pour conjuguées le diamètre et l'ordonnée, et à projeter entre elles l'épaisseur normale aa' parallèlement à la corde qui joint le sommet de l'ordonnée à l'extrémité libre b' du second terme du rapport.

Moyennant cette dernière partie de la solution, dans tous les problèmes du même genre qui vont successivement nous occuper nous pourrions à la rigueur nous contenter de donner l'épaisseur *normale* du mur de pesanteur spécifique équivalente à celle de la matière à soutenir, puisque cette dimension une fois trouvée fournit par le tracé précédent celle qui correspond à un mur composé de matériaux d'une nature donnée, et dont on connaît le rapport de pesanteur spécifique à celle du mur fictif. Cette solution suspendue est même, en quelque sorte, la plus rationnelle de toutes, puisque c'est d'un rapport nécessairement variable que dépend l'épaisseur réelle à donner aux diverses maçonneries qu'on peut avoir à exécuter ; épaisseur qui, par conséquent, ne saurait être donnée *a priori* que dans des cas exceptionnels. C'est peut-être en partie à l'oubli de cette vérité qu'il faut attribuer les différences notables que présentent les diverses formules qui ont été publiées jusqu'à ce jour pour déterminer l'épaisseur à donner aux murs de soutènement,

CAS DES LIQUIDES IMPARFAITS, DANS LESQUELS L'ÉCOULEMENT S'ARRÊTE QUAND LES MOLÉCULES ONT À GLISSER SUR UN CERTAIN ANGLE.

Supposons que le mur qu'on se propose de construire ait à résister à l'effet de la poussée d'un fluide imparfait, composé d'un assemblage de molécules désagrégées qui, en glissant les unes sur les autres, exercent entre elles un certain frottement, et qui, par conséquent, au lieu de s'écouler en totalité quand elles ne sont pas retenues par un obstacle vertical, cessent de se mouvoir avant d'avoir atteint le niveau, et se maintiennent en équilibre sous une inclinaison constante dite talus naturel, suivant laquelle le frottement qu'exerce chaque molécule fait équilibre à l'action de sa propre pesanteur. Le sable pur, les terres sablonneuses, les graviers, le sel, les céréales peuvent être rangés dans cette catégorie.

Soit $AHah$ Pl. VI, *fig. 2*, la tranche de liquide imparfait qu'il s'agit de soutenir, et soit aH le talus naturel qu'il prendrait s'il pouvait s'écouler librement par dessus le point a . Le problème sera résolu si nous parvenons, comme dans le cas précédent, à représenter par une surface pesante la pression horizontale que supporte la ligne ah et à déterminer par suite l'épaisseur normale du mur fictif de pesanteur spécifique équivalente qui lui ferait équilibre.

Le point h ne supporte aucune pression, puisque la molécule correspondante est en équilibre sur l'élément de talus naturel qui se manifesterait immédiatement au-dessous d'elle; le point a supporte la pression que la molécule en regard peut lui transmettre; or, si le liquide était parfait, nous avons déjà vu que ce point supporterait dans toutes les directions, et par conséquent dans la direction aH , une pression mesurée par une colonne de liquide égale en hauteur à ah . Cette pression sera donc représentée en grandeur et en direction par ah' .

Mais, pour avoir égard à l'effet du frottement, il faudra diminuer cette force de la portion $h'b' = h'b$ qui représente également en grandeur et en direction la valeur du frottement pour une molécule pesante placée sur le talus naturel et dont le poids serait mesuré par ah' .

La force qui agirait au point a , dans le sens Ha , et déduction faite du frottement, sera donc mesurée par $b'a$. Et comme cette force, quand on la dégage du frottement, redevient celle d'égale pression, $ab'' = ab'$ sera la base du triangle pesant dans la direction horizontale qui représentera l'effet de la pression du liquide que nous avons à considérer. Le problème se trouvera ainsi ramené à une forme absolument semblable à celle qui nous a permis de résoudre le précédent. Dans ce cas-ci, les deux moments à comparer doivent encore, pour qu'il y ait équilibre, offrir des surfaces qui soient égales entre elles, ce qui exige que le rectangle $b''a \times \frac{1}{2} ah$ soit équivalent au carré construit sur l'épaisseur normale cherchée. Cette épaisseur doit donc être moyenne proportionnelle entre ab'' et $\frac{1}{2} ah$. Construisant cette grandeur, on obtient en aa' et pour le cas d'équilibre strict l'épaisseur normale cherchée.

Dans ce cas particulier, en admettant que $ac : ab''$ comme 1 : 1,50 et que ces deux lignes représentent également le rapport des pesanteurs spécifiques du mur fictif au mur réel, le point c donnera en grandeur et en position l'épaisseur du mur à construire.

CAS OU LES TERRES A SOUTENIR SONT SUSCEPTIBLES DE COHÉSION.
— DÉTERMINATION DU PRISME DE PLUS GRANDE POUSSÉE.

Quand les molécules terreuses que le mur doit soutenir sont susceptibles d'adhérer entre elles après avoir subi un certain rapprochement, la pression qu'elles sont dans le cas d'exercer contre le mur qui les supporte se trouve nécessairement modifiée par suite de l'effet qui

s'est opéré pendant la construction par l'entassement et le damage; dès lors elles ne se détachent plus que par masse, et ne peuvent plus s'écouler suivant le talus naturel qu'elles affectaient étant désagrégées.

Une fois soumises à cette influence, pour apprécier leur effet de poussée il faudrait pouvoir connaître *a priori* la ligne de rupture suivant laquelle s'opérerait la disjonction de la masse soutenue, à l'instant où le mur cédant à l'effet de la pesanteur, l'équilibre se trouverait rompu. A défaut de cette donnée, on suppose que cette rupture aura toujours lieu de manière à détacher de la masse le prisme qui, pour être soutenu, exigerait le plus grand effort de résistance horizontale, et c'est à l'effet produit par ce prisme que le mur est censé devoir faire équilibre : on est certain que la force du mur ainsi déterminée correspondra au plus grand effort qu'il peut être exposé à supporter.

Soit ah_0 fig. 3, le nu intérieur d'un mur de soutènement, soit ah_0 le talus naturel qu'affectent les terres que ce mur doit soutenir, quand elles sont fraîchement remuées. D'après ce que nous venons d'exposer, il s'agit, avant toute recherche ultérieure, de trouver quel est le prisme de plus grande poussée susceptible de se détacher de la masse, après que ces terres auront de nouveau contracté adhérence.

Comme la ligne de séparation de ce prisme sera nécessairement comprise entre la ligne de talus naturel ah_0 et la paroi verticale du mur, nous diviserons cet espace en un certain nombre de prismes élémentaires ahh_1 , ahh_2 , etc., et nous chercherons, par interpolation, celui d'entre eux qui correspond au maximum de poussée. On admet que le joint de séparation s'effectuera suivant une direction rectiligne, parce que cette supposition est la plus désavantageuse, vu que le frottement exercé sur une surface courbe se trouve augmenté de toute la résistance que produit alors l'engencement du relief et de l'incrustation.

Si, dans cette figure, nous prenons encore pour unité linéaire $\frac{1}{2}ah$, les surfaces de chacun des prismes compris entre la paroi ah et une des lignes de division seront mesurées par les distances hh , hh , hh , etc. ; ces distances pourront donc représenter en grandeur linéaire la force de pesanteur qui sollicite chacun de ces prismes, et ces forces décomposées perpendiculairement au joint de rupture correspondant, donneront en h, d , h, d , h, d , etc., les pressions supportées par ces divers joints ; et en hd' , hd , hd , etc., la force de translation des prismes le long de ces mêmes joints. De plus, chaque pression projetée à termes superposés et distincts entre les ordonnées ah et hd , dans le sens de hd à d, a , donnera la valeur du frottement qui, dans chacune des suppositions de rupture, s'oppose à la descente du prisme sur son joint de glissement, valeur qu'il faudra déduire de la force de translation déjà trouvée pour obtenir la force réelle qui se manifesterait dans le sens de chaque joint. Après avoir opéré cette soustraction à partir du cercle d, d, d , si par l'extrémité des restes on fait passer une courbe, elle fournira par ses rayons vecteurs hi , hi , hi , la valeur comparative des forces de translation réelle que nous avons à considérer, et par ses ordonnées parallèles à ah la valeur correspondante des pressions libres. Il sera donc très-facile de déterminer à quels joints appartiennent ces deux maxima qui correspondent ainsi au cas dans lequel un nombre quelconque de prismes juxtaposés glisseraient librement sur le dernier des plans de joints par lequel chaque masse se trouve terminée.

Mais, si nous admettons qu'un mur vertical s'oppose au mouvement de ces masses diverses, la résistance déployée par l'obstacle équivaldra à une force horizontale, qui, combiné avec l'action du plan incliné, doit faire équilibre à la force de translation que nous venons de déterminer. Or, toute force nouvelle qui n'est pas exercée

dans le sens même du joint, donnera naissance à une nouvelle pression qui aura pour résultat d'augmenter le frottement produit par le prisme reposant en liberté sur ce joint, et de réduire d'autant la force de translation libre qui se développerait si, comme nous venons de le supposer, la masse pouvait y glisser sans rencontrer d'obstacle.

Nous avons donc à chercher quelle est cette force horizontale que le mur aura à développer, dans les diverses suppositions de rupture que la figure comporte, pour faire équilibre à la masse correspondante. On voit déjà, d'après les considérations précédentes, que cette force, décomposée suivant la direction du joint que l'on considère, et augmentée du frottement que sa pression normale y détermine, doit, par l'ensemble de ces deux actions, faire équilibre à la force effective de translation que le prisme en liberté développerait en glissant sur ce même joint, forces que nous avons déjà trouvées, et qui sont données par les rayons vecteurs de la courbe dont le pôle est au point h , et dont le maximum tombe entre les joints 4 et 5.

En considérant (*fig. 4*) le joint ah , par exemple, nous admettrons qu'il supporte en o une pression horizontale quelconque égale à om ; cette force aura pour composantes les deux forces nm et on , l'une dans le sens même du joint, et l'autre normalement à sa direction. Le frottement dû à cette dernière ayant été déterminé, sera porté de m en f , additionnellement à la force de translation; et nous pourrions immédiatement en conclure qu'une force om appliquée horizontalement suffira pour faire équilibre à une force verticale dont la composante de translation (toujours déduction faite du frottement) serait égale à nf . Donc, si op représente le poids du prisme, et si st mesure le frottement dû à sa composante de pression ps , nous n'aurons qu'à diviser la force de translation réelle ot en deux segments proportionnels à nm et mf , et le segment

homologue à nm nous fournira la composante de la force que nous cherchons.

On effectue ce tracé en menant par t une parallèle à of jusqu'à la rencontre e de no , et par ce point une parallèle ei à to ; ces deux dernières lignes sont égales par construction, et la première se trouve divisée au point i dans le rapport demandé. Donc oi sera la valeur de la pression horizontale qui maintiendrait en équilibre le prisme sollicité par une force de pesanteur mesurée par op .

Cette manière de déterminer la force horizontale qui maintiendrait le prisme en équilibre, n'est pas à beaucoup près la plus simple : nous la donnons ici, parce que cette décomposition des forces va nous servir plus tard à déterminer le point d'application de la pression correspondante.

Nous pouvons remarquer que parmi toutes les directions qu'est susceptible de prendre une force unique par laquelle on peut supposer le prisme ha exclusivement sollicité, il en est une telle que, sous son influence, ce prisme doit se trouver exactement en équilibre sur son plan de glissement : c'est celle qui serait capable de développer, sur ce plan, un frottement égal à sa propre composante de translation. La ligne pz , qui fait avec la normale ps l'angle qu'affecte le talus naturel, donne évidemment cette direction particulière. Donc, quand nous supposons ce prisme sollicité par une force de pesanteur op , il doit nous suffire, pour le maintenir en équilibre, de lui appliquer une force horizontale qui, combinée avec celle-ci, détermine une résultante qui affecte précisément la direction pz .

La grandeur oz , comprise entre le point o et la ligne pz , mesurera cette force horizontale particulière qui se trouve nécessairement égale à io , puisque la somme oz de sa composante de translation et de son frottement se trouve égale par construction à ev .

Cette nouvelle manière d'obtenir la force horizontale est celle que nous adopterons de préférence; appliquée à tous les prismes de la *fig. 3*, elle correspond à une interpolation qui se traduit par une courbe à ordonnées orthogonales. Ainsi, pour le prisme qui a pour mesure hh_1 , c'est cette ligne, dont la direction se confond avec la pesanteur, qui fait avec la normale ah_1 l'angle du talus naturel; la force horizontale à ajouter ici est donc nulle. Pour le prisme ahh_1 , dont le joint a tourné sur le précédent d'un angle élémentaire, la ligne qui se confondait en h_1h se sera écartée d'un même angle; et en élevant une horizontale à l'extrémité de hh_1 , qui figure en grandeur et en direction le poids du nouveau prisme, sa portion interceptée h_1m sera la grandeur de la force horizontale cherchée, grandeur qui nous fournira avec plus de simplicité la construction symétrique exécutée sur l'angle h_1hn_1 . Donc, enfin, appliquant le même tracé aux autres prismes, et réunissant par une courbe le sommet de toutes ces ordonnées ainsi obtenues, l'ordonnée maxima h_1n_1 nous fera connaître à la fois, par sa dimension, la grandeur de la force horizontale qui doit faire équilibre au prisme de plus grande poussée, et par son origine, en nous indiquant de h en h_1 la mesure de la surface de ce prisme, elle donnera un des sommets qui correspond à cette mesure.

En remarquant que cette courbe est déterminée par quatre ordonnées égales deux à deux, selon qu'elles proviennent, par couple, des lignes de division qui procèdent par angles égaux, à partir du point h et du point d_1 , et que, par conséquent, les cordes nn_1 , n_1n_2 , qui réunissent les extrémités de chaque couple se trouvent horizontales, il est facile d'en conclure que la tangente correspondant à l'ordonnée maxima, soit la dernière corde horizontale, proviendra de la ligne qui divise en deux parties égales l'arc hd_1 , et par conséquent l'angle compris entre le

nu du mur et le talus naturel ; et que cette ligne détachera, dans tous les cas semblables, le prisme cherché de plus grande poussée.

La grandeur de la force étant trouvée, il ne s'agit plus que de pouvoir connaître son point d'application. Remarquons d'abord que, dans le cas d'une cohésion absolue, celui de la force *op* qui sollicite le prisme *Ha* (*fig. 4*) n'est pas lui-même invariablement déterminé : on pourrait d'abord croire qu'il se trouve au centre de gravité superficiel ; mais, non - seulement ce centre de gravité peut s'élever et descendre dans le prisme sans que la force réelle de translation *ot* change de valeur, mais ce centre de gravité pourrait encore se mouvoir horizontalement sur *om* sans produire plus de changement dans cette même force.

Nous pourrions évidemment en conclure : la même incertitude pour la force horizontale *oz* que nous avons à lui opposer ; en quelque point de la ligne qu'on la suppose, en effet, appliquée, si on la combine avec l'effet du plan incliné, elle produira toujours une force de translation *ei* et un frottement *iv* identiques ; et la somme de ces deux forces fera nécessairement équilibre à la force de translation *ot*, qui reste elle-même invariable d'intensité et de direction. Donc, si nous divisons cette force horizontale en deux, les deux composantes pourraient être égales, tout en conservant la même incertitude du point d'application ; donc, enfin, en quelque nombre de forces élémentaires que nous divisons cette force, chacune d'elles pourra se trouver égale à toutes les autres. Mais opposer une ligne *ah*, qui doit faire obstacle par sa résistance au mouvement du prisme dont la ligne correspondante marche parallèlement à sa direction, c'est substituer une pression superficielle à une force ; c'est diviser la force en une infinité de composantes élémentaires toutes égales, puisqu'il n'y a aucune raison qui justifie leur inégalité, et dont le point d'application se trouve ainsi déterminé ; donc, enfin,

quand on voudra calculer le moment de cette pression particulière, par rapport à un point extérieur au prisme, il faudra supposer son centre d'action situé au centre de la ligne qui la supporte.

Admettons maintenant que, dans la *fig. 1*, la surface supérieure du liquide ait un poids quelconque à supporter en surcharge, le triangle *Aah* deviendra un trapèze dans lequel, à cause du principe d'égalité de pression, la ligne *A'h'* sera parallèle à *Ah*; le centre de gravité de la nouvelle surface s'élèvera bien au-dessus du tiers de *ah*, mais il ne pourra jamais atteindre jusqu'à la moitié, vu que cette sur-élévation correspondrait à une surcharge infinie.

Nous venons de voir qu'il faudrait admettre une cohésion absolue pour que le centre d'application de la pression des terres s'élevât à $\frac{1}{2} ah$; dans le cas d'une cohésion relative, il restera donc constamment en dessous, et il redescendra au tiers quand cette cohésion deviendra nulle, c'est-à-dire quand la fluidité redeviendra absolue. Nous en concluons, en conséquence, que ce centre d'application ne saurait dépasser ces deux limites.

Or, dans le cas d'une cohésion imparfaite (celui que l'on a presque toujours à traiter dans la pratique), soit que les terres arrassent le mur de soutènement, soit qu'il y ait surcharge, on ne saurait trouver le point d'application précis de la force qu'elles exercent, sans avoir recours à une interpolation basée sur des suppositions plus ou moins rigoureuses; mais nous venons de voir que la limite des erreurs que l'on peut commettre à ce sujet est très-restreinte, puisque toutes ces variations ne descendent pas au-dessous du tiers, et ne s'élèvent pas à la moitié de la hauteur du mur; il s'ensuit que nous pourrions supposer que le centre d'application s'élève proportionnellement à la cohésion et à la surcharge, qu'il correspond au $\frac{2}{11}$ dans le cas où il s'agit de soutenir des terres végétales ordinaires, et qu'il s'élève à $\frac{1}{11}$ quand ces mêmes

terres ont à transmettre l'effort d'une surcharge qui ne dépasse pas la hauteur même du mur. Cette manière d'arbitrer le lieu du centre d'application serait, en quelque sorte, un vice de la méthode, si son influence ne devait pas être annihilée par une autre opération du même genre, et d'une importance bien plus marquée : nous voulons parler du degré de stabilité qu'on doit donner au mur, en sus de l'état d'équilibre ; question encore plus difficile à résoudre que la précédente, puisqu'elle n'est pas comprise dans des limites aussi étroites.

Voici comment on y parvient, une fois pour toutes : après avoir déterminé l'épaisseur du mur dans le cas d'équilibre strict, on compare celle-ci à l'épaisseur fournie par un grand nombre d'anciens murs, pris pour exemple, et l'on cherche quel est le coefficient dont il faudrait affecter le moment de poussée, pour que le mur projeté se trouvât dans les mêmes conditions d'équilibre que la généralité des murs auxquels on le compare parmi ceux qui ont déjà reçu la sanction de l'expérience. Or, comme ce coefficient se trouve assez élevé (le génie militaire a adopté 1.80), il s'ensuit que, devant une modification aussi importante, l'incertitude du point d'application, qui correspond à peine à un douzième dans la variation de ce moment, peut sans erreur sensible se trouver arbitrée, comme nous venons de le proposer.

Le prisme de plus grande poussée, ou plutôt la pression h, n , qui lui correspond, et qui est censée appliquée au $\frac{2}{3}$ de la hauteur ah , étant connue, en se rappelant que cette force linéaire représente une surface pesante rapportée à l'unité $\frac{1}{2} ah$, il s'ensuit qu'en négligeant cette unité son moment superficiel sera mesuré par $h, n, \times \frac{2}{3} ah$. Dans les mêmes circonstances, celui du mur cherché sera toujours x^2 ; donc, le carré construit sur x devra égaler ce rectangle en surface.

La figure précédente n'est compliquée que parce qu'elle

suppose le prisme de plus grande poussée encore inconnu ; en admettant que , dans tous les cas , la ligne de solution qu'affectera ce prisme divise en deux parties égales l'angle formé par le talus naturel et la verticale , la construction reprend toute sa simplicité désirable.

Ainsi $op = od$ représentant , *fig. 5* , le poids du prisme de plus grande poussée aod , ce qui exige qu'on prenne encore pour unité $\frac{1}{2} oa$, le tracé de la *fig. 4* identiquement reproduit dans celle-ci nous donnera en oz la valeur de la pression horizontale qui doit faire équilibre à la force de translation du prisme. Cette pression étant linéairement représentée , son moment sera mesuré par le rectangle $oz. \frac{7}{18} ah$, lequel devra être égal au carré construit sur l'épaisseur normale cherchée oc ; nous n'aurions donc qu'à appliquer encore à cette dimension l'opération finale qui sert à ramener l'épaisseur du mur fictif à celle du mur réel qu'on aura eu l'intention de construire.

Pour passer enfin , dans cette même figure , du cas d'équilibre strict à celui d'équilibre stable , en supposant pour cela que l'on adopte 1.80 pour le coefficient de stabilité , on projettera le bras du levier $om = \frac{7}{18} ah$ dans le sens de 1 à 1.80 , ce qui revient à porter de o en n les sept dixièmes de ah , et l'on obtiendra l'épaisseur normale ob correspondant à l'état stable , épaisseur qu'il suffira de projeter encore dans le rapport des racines carrées des pesanteurs spécifiques des maçonneries et des terres , pour avoir l'épaisseur du mur réel oi qui correspond à l'état d'équilibre stable. Une opération analogue compléterait toutes les autres opérations de ce même chapitre dans lesquelles , pour plus de simplicité , nous nous sommes borné à donner l'équilibre strict.

CAS OU LES TERRES S'ÉLÈVERAIENT AU-DESSUS DU MUR,
EN SURCHARGE TALUSSÉE.

Tout étant comme dans le problème précédent, nous pouvons supposer encore que les terres dépassent en hauteur le mur qui les soutient, et qu'elles s'élèvent en surcharge soit artificiellement, soit naturellement talussée, au-dessus de son couronnement, en se profilant suivant la ligne hpH , Pl. VI, *fig. 6*; il suffirait, par exemple, de gazonner le talus pour lui donner une inclinaison artificielle supérieure au talus naturel des terres.

Pour résoudre ce nouveau problème, il faudra encore chercher le prisme de plus grande poussée, en appliquant à cette recherche un procédé d'interpolation tout à fait analogue à celui que nous venons de faire connaître, mais dans lequel il faudra, pour chaque prisme partiel, tenir compte de l'effet de la portion de surcharge qui lui correspond. On y parviendra par le procédé que nous allons indiquer, et qui, étant de nature à s'appliquer à un prisme quelconque, convient également soit à la recherche de ce prisme particulier, soit à la détermination de la pression nécessaire pour lui faire équilibre, quand une fois l'inclinaison correspondante au maximum se trouve connue.

Soit donc, *fig. 6*, ah la hauteur limitée du mur, et soit aH la ligne qui détermine un des prismes élémentaires dont on cherche à connaître la poussée.

Nous avons d'abord à évaluer linéairement la force agissante, mesurée par la surface du quadrilatère $ahpH$, en prenant pour unité linéaire la grandeur $\frac{1}{2} ah$.

D'après ce que nous avons déjà exposé en traitant des surfaces, nous obtiendrons cette mesure soit en appliquant sur la diagonale ap une règle à tranches parallèles, d'une largeur égale à ah , soit, à défaut d'un pareil instrument, en décrivant un arc de cercle du point a comme centre,

avec un rayon ah , en menant par p une tangente à cet arc, et en déterminant sur cette tangente la portion op , interceptée entre les deux parallèles à la diagonale, menées par les deux sommets du quadrilatère qui lui sont opposés.

Cette grandeur une fois connue, l'épaisseur du mur s'obtiendra, sauf le point d'application de la force, comme s'il n'existait pas de surcharge, et que le mur eût à résister à un prisme de pesanteur équivalente au quadrilatère $ahpH$, et dont la base horizontale supérieure égale à op , affleurerait son couronnement, le plan de glissement et le talus naturel restant les mêmes.

Nous porterons donc op , de b en c ; nous déterminerons la ligne cd qui fait avec la normale un angle égal au talus naturel; et, d'après ce que nous avons déjà expliqué, *fig. 5*, la grandeur interceptée entre le point b et la direction cd mesurera la force de pression horizontale que doit pouvoir supporter le mur pour faire équilibre au quadrilatère. Nous trouverons donc l'épaisseur normale en construisant une moyenne proportionnelle entre $\frac{1}{2} ah$ et bd ; et nous parviendrons à l'épaisseur réelle en projetant cette moyenne proportionnelle dans le rapport inverse des racines carrées des pesanteurs spécifiques des terres à soutenir et du mur à construire.

Deux tracés différents correspondent dans la figure à cette dernière opération : l'un donne l'épaisseur d'un mur de briques de 1600 kil. le mètre cube, et l'autre celle d'un mur en maçonnerie de moellons de 1900 kil. le m. c., les terres étant, dans les deux cas, évaluées à 1300 kil.

La *fig. 7* présente, dans ses détails les plus circonstanciés, tout le tracé de l'épure qui sert à déterminer l'épaisseur d'un mur de soutènement ayant à supporter des terres en surcharge : ah est la hauteur donnée du mur ; hp, H le profil des terres dans leur partie supérieure au couronnement ; HaA l'angle de talus naturel ; a_1, a_2, a_3 , etc.,

sont les subdivisions prismatiques suivant lesquelles on suppose que pourrait s'opérer la disjonction du massif en cas de rupture; elles sont tracées à intervalles égaux sur le cercle 1, 2, 3, 4, qui a pour rayon la hauteur ah , et choisies de manière qu'une d'entre elles corresponde exactement au point p , sommet du talus de surcharge. La tangente po , menée par ce point au cercle 1, 2, 3, 4, détermine et mesure entre la ligne ho et les autres parallèles p, h, p, h , etc., à la diagonale commune ap , la surface de chacun des prismes élémentaires que les deux parallèles capables embrassent, et que détacherait chaque joint de rupture envisagé séparément. Ces grandeurs op, op, op , etc., représentent donc la valeur de la force verticale de pesanteur qui sollicite chacun d'eux. Toutes ces forces une fois déterminées sont décomposées en deux : l'une ps représente la pression exercée sur le joint de glissement, et l'autre so la force de translation libre suivant ce joint; et, enfin, à chacune d'elles se trouve appliquée la construction de la *fig. 4*, qui fait connaître la grandeur de la force horizontale que doit opposer le mur pour faire équilibre à la surface particulière du prisme que chaque force représente; ce qui s'obtient en menant par p une ligne pz , faisant, avec la composante de pression ps , un angle spz égal à celui du talus naturel, et cette ligne vient intercepter sur la perpendiculaire élevée au point o une grandeur oz qui mesure la force cherchée.

Le maximum oz , de toutes ces valeurs ainsi obtenues correspond au joint n° 5, et représente la pression horizontale d'un rectangle, dont les deux côtés sont oz , et $\frac{1}{2} ah$. Prenant encore la moyenne proportionnelle entre oz , et $\frac{1}{2} ah$ rapportés en ar et an , on aura l'épaisseur normale am , celle d'un mur de pesanteur spécifique équivalente aux terres à soutenir, et dont la hauteur serait ah . Projettant enfin am dans le sens de la racine carrée de la

pesanteur spécifique des maçonneries à celle des terres, pesanteurs qu'on suppose ici représentées par av et au , on obtiendra en at l'épaisseur du mur cherché.

Le mur étant ainsi trouvé, admettons que l'on place sur le talus hp une couche de terre désagrégée, de manière à ce que, la hauteur HA restant invariable, le nouveau talus naturel vienne affleurer l'arête extérieure de couronnement du mur. En faisant abstraction de la mobilité des parties inférieures, l'équilibre existera, c'est-à-dire que le triangle sur-ajouté qui correspond à la largeur du mur supportera toute la pression que le reste de la tranche entière exerce sur le prolongement du nu intérieur. Si donc nous supposons que la cohésion agit sur cette portion intérieure de tranche sur-ajoutée, et si nous avons égard au mouvement que le mur peut prendre autour de son arête extrême de base, pour reconnaître les perturbations que ce nouvel état de choses aura apportées il nous suffira de calculer l'épaisseur du mur normal correspondant à la hauteur de disjonction verticale des terres.

Le problème se trouvera dès lors ramené à substituer à ce dernier un mur en maçonnerie de même résistance, et d'une hauteur moindre, et qui puisse correspondre au même nu intérieur. Pour cela, on commencera par déterminer l'épaisseur d'un mur normal de hauteur égale au mur réel, et il ne restera plus ensuite qu'à transformer celui-ci en un mur de résistance équivalente. Le premier problème se résout par le tracé suivant :

Soit, Pl. VI, *fig.* 8, le mur ad qu'il faut remplacer par un mur d'une construction identique, d'une hauteur moindre $= bf$, et d'une résistance équivalente autour du point a . En prenant pour unité de mesure $\frac{1}{2} bf = fi$, le moment ax^3 du nouveau mur, moins le moment ab^3 de la portion af de l'ancien, devra être équivalent au moment de la portion supprimée ed , moment qu'il s'agit de déterminer ; pour cela, nous ramènerons d'abord la mesure du

rectangle ed à l'unité $\frac{1}{2}bf$, en projetant sa hauteur fd dans le rapport inversé de sa base ef à $\frac{1}{2}bf = fi$; ce qui s'obtient en menant par d une parallèle dg à la diagonale ei . Cela fait, si sur $fg + \frac{1}{2}ef$ nous construisons un demi-cercle, l'ordonnée fm représentera le côté du carré équivalent au produit des deux segments $\frac{1}{2}ef$ et fg ; par conséquent ce carré mesurera le moment du rectangle ed autour du point a : l'équation précédente pourra donc se mettre sous la forme $ax^2 - ab^2 = fm^2$. Or, il est facile de voir que, en prenant pour valeur de ax l'hypoténuse em , on satisfait à cette condition; ce sera, par conséquent, l'épaisseur du mur cherché, et il suffira, pour terminer le tracé, de la ramener en vraie position par l'arc de cercle mf' .

Ces préliminaires admis, nous allons procéder à la solution détaillée du cas particulier de surcharge que nous nous sommes proposé.

On prendra, Pl. VI, *fig. 9*, les deux épaisseurs normales qui correspondent aux points h et p , l'une hm , tirée de la *fig. 7*, et l'autre pn , dans le cas déjà résolu d'un mur affleurant le niveau supérieur des terres. Joignant les points m et n par une droite, on pourra supposer que ces épaisseurs diminuent proportionnellement à mesure que le mur s'élève, et que, par conséquent, la dimension il sera celle du mur normal extérieur et correspondant à un surhaussement égal à hi .

Donc, ce mur ferait équilibre à la pression exercée suivant le nu intérieur déterminé par la ligne ls ; et, s'il arrivait que cette différence hi exprimât linéairement celle des pesanteurs spécifiques qui concernent le mur normal et le mur réel à lui substituer, un mur réel $sdha$ supporterait la même pression opérée suivant la même ligne, et la stabilité de son équilibre aurait de plus en sa faveur le moment du triangle de surcharge dth autour de la verticale ah .

Quand le rapport est moindre, l'épaisseur du mur réel tombe au delà du point d ; quand ce rapport est supérieur, ce qui arrive en adoptant celui de la *fig. 7*, cette épaisseur tombe en dedans; et en réalisant alors le tracé qui la détermine, nous trouvons ici qu'elle correspond au point d' . Ce serait nous livrer à des redites inutiles que d'expliquer encore comment, dans cette figure, on réduit d'abord le mur normal *slia* à un mur équivalent qui s'arrête à la hauteur dh , et comment, au moyen de l'épaisseur ho de ce dernier, on obtient l'épaisseur hd' du mur réel à lui substituer; quand la différence dd' des épaisseurs est trop importante, il est toujours possible de la réduire, car il existe une hauteur particulière de mur normal pour laquelle elle disparaît, et que l'on peut obtenir par interpolation. Répétons, en effet, les deux opérations précédentes de réduction pour un surhaussement $h'i'$, et nous trouverons une épaisseur de mur réel égale à $h'd''$. Or, à cause de l'égalité très-approchée des distances $d'd''$ et hh' , le mur réel $s'd'ha$ de résistance équivalente au mur normal $s'l'i'$ pourra lui être substitué; et se trouvera dans les mêmes conditions de pression de la part des terres, puisque dans cette nouvelle position son nu intérieur correspondra à celui du mur normal qu'il est destiné à remplacer.

Si l'on voulait, en outre, tenir compte du triangle variable de surcharge dlh , il faudrait pour chaque mur réel déterminer en maçonnerie le sur-exhaussement rectangulaire qu'il représente, et réduire chaque fois le mur en épaisseur pour contre-balancer l'effet de cette surcharge: on arriverait ainsi à un équilibre strict. Mais il n'y a nul inconvénient à se contenter d'un équilibre déjà stable, surtout si, comme dans le cas qui nous occupe, on peut toujours évaluer le moment partiel de stabilité dont on n'a pas tenu compte.

Si l'on avait à déterminer simultanément les épaisseurs

d'un grand nombre de murs de même nature, comme cela arrive lorsqu'on fait les projets d'une route en pays de montagnes, on pourrait se donner une espèce de table graphique dans laquelle, la pression horizontale étant prise pour argument, on pût immédiatement trouver l'épaisseur du mur réel correspondant, dans le cas d'équilibre stable.

Supposons que sur le même axe horizontal on construise une suite de demi-parafoles ayant même sommet, et dont le paramètre augmenterait de l'une à l'autre d'une quantité constante; ces courbes successives seront faciles à tracer, étant données par deux tangentes et leurs deux points de contact, savoir : la tangente verticale au sommet commun, et celle qui dans chaque courbe correspond au point dont l'ordonnée se trouve égale au paramètre, vu que ce point a pour abscisse une grandeur identique à son ordonnée, et que la sous-tangente qui en dérive présente également cette même dimension.

Une hauteur de mur étant donnée, on choisira parmi toutes ces courbes celle dont le paramètre se trouve égal aux sept dixièmes de cette dimension; en prenant pour abscisse la pression horizontale qu'il doit supporter, cette courbe, par son ordonnée correspondante, fournira immédiatement l'épaisseur normale; si, de plus, la figure se trouve traversée par une suite de lignes parallèles à la direction qui projette dans le rapport constant des racines carrées de la pesanteur spécifique des murs à construire à celle des terres à soutenir, celle de ces parallèles qui passera le plus près de l'extrémité de l'ordonnée qui donne l'épaisseur normale déterminera sur l'axe l'épaisseur du mur à construire. Sans doute toutes ces lignes ne coïncideront pas, mais il sera toujours possible d'interpoler à vue entre elles les lignes qui correspondent à la vraie solution.

Toutes les solutions précédentes seraient incomplètes, si elles devaient se borner à fournir l'épaisseur des murs

de soutènement à section rectangulaire. Il nous reste, en conséquence, à indiquer le moyen de passer de cette forme particulière à la forme plus généralement usitée, qui présente un trapèze rectangulaire à talus extérieur, tout en conservant au mur trapézoïdal une résistance équivalente à celle du mur qu'il est destiné à remplacer.

Nous appellerons fruit la différence qui existe entre les deux bases parallèles d'un quelconque de ces trapèzes ; le fruit, étant une fonction de l'angle d'inclinaison et de la hauteur, sera une quantité constante tant que ces deux éléments resteront invariables.

Nous avons déjà vu que le moment d'une surface rectangulaire autour de son arête de base pouvait se mesurer par le carré construit sur son épaisseur ; nous en concluons que le moment du trapèze à lui substituer sera mesuré, dans les mêmes circonstances, par le carré construit sur sa grande base, moins le moment du triangle rectangle déterminé par le fruit et la ligne de talus. Or, ce moment étant pris par rapport au même point de rotation, et en rapportant la surface triangulaire à la même unité de mesure (la demi-hauteur), se trouvera mesuré superficiellement par le tiers du carré construit sur le fruit. Les deux premiers moments étant des carrés, il nous suffira, pour ramener celui-ci à la même forme que les deux autres, sans changer pour cela sa valeur, de prendre une moyenne proportionnelle entre le fruit et son tiers.

On voit dès lors que pour qu'il y ait égalité de moments entre les deux murs qui doivent mutuellement se remplacer, il suffira de donner à la grande base du trapèze une dimension telle que le carré déterminé par elle, moins le carré construit sur la moyenne géométrique prise entre le fruit et son tiers, soit équivalent au carré construit sur la base du mur rectangulaire qu'il s'agit de remplacer.

Si donc (*fig. 10*) on porte le fruit de a en b et son tiers de a en c , si sur la somme de ces deux lignes on construit un demi-cercle, et si on joint le sommet i de l'ordonnée ai à l'angle d , on aura, de d en i , la grandeur de la base trapézoïdale cherchée, et cette ligne, ramenée par un arc de cercle à sa véritable position dc' , permettra de tracer définitivement le trapèze demandé.

Cette construction, très-facile à exécuter, comporte une vérification qui ne lui cède rien en simplicité : le centre de gravité du rectangle se trouve en o au milieu de sa diagonale; celui du trapèze s'obtient en o' par le procédé que nous avons indiqué page 214 pour les quadrilatères en général. En prenant pour unité la hauteur du mur, la surface du rectangle est mesurée par sa largeur, et celle du trapèze par sa base supérieure, augmentée du demi-fruit. Si donc on joint les deux centres de gravité par une droite oo' , et qu'à partir du point z , où elle atteint la verticale passant par le centre de rotation, on porte sur cette dernière la mesure des deux surfaces qui se font équilibre, il faut que les deux droites qui en joignent les extrémités mz aux deux centres de gravité soient parallèles entre elles.

La transformation précédente s'exécute par un des tracés géométriques les plus élémentaires : cette circonstance est d'autant plus favorable que, vu l'économie de maçonnerie qui résulte de la substitution du trapèze au rectangle, la première de ces deux formes est presque toujours employée de préférence dans les travaux publics. Il était donc très-essentiel que l'on pût arriver sans difficulté à en déterminer les éléments linéaires constitutifs.

Si la forme du mur à construire, tout en conservant sa face intérieure verticale, devait offrir une section plus compliquée, il conviendrait toujours de déterminer, *a priori*, le mur rectangulaire de résistance équivalente à la poussée qu'il s'agit de maintenir, et de ramener celui-ci

à la forme demandée de résistance équivalente par interpolation graphique; ce qui consistera, dans cette circonstance, à faire pour le mur demandé une suite de suppositions arbitraires qui puissent comprendre entre elles la vraie solution, et à chercher un des éléments qui déterminent cette dernière par le tracé de la courbe des erreurs commises. Cette courbe aura pour abscisses l'argument variable arbitrairement choisi dans les lignes constitutives de la surface cherchée, et pour ordonnées, les excès superficiels en plus ou en moins que présenteront les moments correspondants à la section que détermine séparément chaque abscisse, comparés au moment invariable du mur rectangulaire. Le point où la courbe qui joint les sommités de ces ordonnées coupera l'axe des abscisses, donnera la véritable longueur de l'argument qui correspond à la solution.

TROUVER L'ÉPAISSEUR A DONNER AUX PIÉDROITS D'UNE VOÛTE EN BERCEAU POUR QU'ELLE SE MAINTIENNE EN ÉQUILIBRE.

Supposons qu'on donne, Pl. VII, le cintre 1, 2, 3, 4, 5, d'une voûte, son extradós jj'' , sa chape zz' , et la hauteur de ses piédroits $6b$, et qu'il s'agisse de trouver l'épaisseur qu'il convient de donner à ces mêmes piédroits pour que la voûte soit stable.

Puisque la voûte offre une figure symétrique, il nous suffira évidemment d'opérer sur une de ses moitiés; et nous remarquerons, en outre, comme nous l'avons déjà fait pour les murs de soutènement, que la question que nous avons à résoudre se trouve encore ramenée à de simples relations de surfaces pesantes.

En supprimant, comme nous l'avons fait dans la figure, la demi-voûte de droite, nous devons cependant tenir compte de la pression que cette portion de voûte doit exercer selon le joint vertical, puisque c'est elle qui doit maintenir la demi-voûte de gauche en équilibre, et qui doit

par conséquent nous servir à déterminer les dimensions qui correspondent à cet équilibre : il est donc nécessaire, avant tout, de connaître exactement la valeur de cette pression, qui nous sera donnée aussi bien en opérant sur la partie gauche que sur la partie droite.

Cette pression, étant nécessairement différente selon le joint auquel correspondrait la disjonction de la voûte en cas de rupture, est susceptible d'offrir un maximum. Nous le déterminerons par des considérations analogues à celles qui nous ont servi à trouver le prisme de plus grande poussée. Nous supposerons, en conséquence, que la voûte peut s'ouvrir successivement, selon ses divers joints élémentaires, à partir du sommet, et nous chercherons, par interpolation, celui d'entre eux qui, en s'ouvrant, détachera la portion capable d'exercer la plus grande poussée, force dont nous aurons, en outre, à déterminer la valeur. Cette valeur une fois connue, il ne nous restera plus, pour qu'il y ait équilibre, qu'à donner au piedroit de la demi-voûte de gauche une épaisseur telle que son moment, pris par rapport à son arête extrême, ajouté au moment de la demi-voûte entière autour de la même arête, soit équivalent au moment de la plus grande pression agissant horizontalement au sommet de l'extrados. La solution du problème qui nous occupe se trouvera donc naturellement divisée en deux parties; nous allons traiter chacune d'elles séparément.

PREMIÈRE PARTIE. *Détermination du joint particulier de la voûte qui, par l'ouverture de son extrados, correspond au maximum de pression exercée au sommet j de cette courbe* : ce qui suppose que la portion détachée tournera en même temps autour de deux de ses points, l'un situé à l'intrados et l'autre au sommet de l'extrados.

En divisant la demi-voûte en un certain nombre de voussoirs qui comprennent entre eux des arcs égaux, et dont les joints soient censés prolongés jusqu'à la chape,

nous allons chercher celui de ces joints qui intercepte, à partir du sommet, la partie de voûte dont le moment, pris par rapport à l'arête inférieure du joint de rupture, se trouve tel que la force horizontale, déduite de ce moment, nous donne le maximum de pression cherchée. Dans cette supposition, il nous faudra limiter la demi-voûte à une verticale ah , qui soit évidemment en dehors du joint correspondant au maximum.

Pour parvenir à cette recherche, nous aurons d'abord à déterminer les centres de gravité de tous les quadrilatères qui composent séparément chaque voussoir : ce que nous obtiendrons par le procédé déjà employé, Pl. VI, *fig.* 10, pour le trapèze de soutènement. Nous considérerons ici, pour plus de simplicité, la douelle comme droite. Nous prendrons ensuite séparément la surface linéaire de ces mêmes quadrilatères, surface qui, en adoptant pour unité la corde des arcs égaux que les voussoirs embrassent, sera donnée pour le premier quadrilatère, à partir du sommet, par la moitié de la ligne $1s$, et ainsi de suite pour tous les autres : c'est en effet la mesure que l'on obtiendrait en appliquant sur la diagonale qui passe par o une règle dont la largeur serait égale à la corde.

Ces opérations préliminaires exécutées sur chacun des voussoirs séparément, pour obtenir le moment du premier voussoir autour de l'arête de rotation 1 qui proviendrait de l'ouverture du joint qu'elle limite, nous prendrons d'abord son moment par rapport à la verticale jk , ce qui s'effectuera en rapportant son centre de gravité en c' , par une parallèle à la verticale, et projetant entre les deux conjuguées dz et da la surface $1s = ds''$ du premier voussoir, dans le sens de np_6 à p_6c' (nous adoptons, pour opérer cette multiplication superficielle, une nouvelle unité linéaire p_6n , qui disparaîtra dans les opérations subséquentes) : le moment cubique dm_1 , ainsi obtenu, sera le double du moment cherché, vu que les grandeurs $1s$, $2s$, $3s$, sont le

doubling des surfaces de chaque voussoir; opérant de même pour tous les autres, nous obtiendrons successivement les moments superposés dm_1, dm_2, dm_3 , etc., qui leur correspondent. On prend ces moments doubles pour obtenir un tracé plus distinct et susceptible d'une plus grande exactitude.

Les moments obtenus, nous en prendrons la moitié, ce qui ramènera leur valeur à sa grandeur réelle, et nous les additionnerons par ordre, à partir du premier sur l'horizontale qui passe par j , leur total occupant la grandeur jm_{116} .

Nous additionnerons également les surfaces, dans le même ordre, à partir et en dessus du même point j , sur la ligne verticale jk , dans le prolongement supérieur du joint qui correspond au sommet de la voûte. Leur total correspondra au point s'_{116} .

Considérant alors un des joints quelconques $1s$, comme celui de rupture, joignant le point de rotation 1 au sommet j de l'extrados, et prolongeant la ligne qui opère cette jonction, la surface js'_{011} , correspondant à la portion de voûte que ce joint détache, sera projetée horizontalement entre les deux conjuguées jk et j_1 , dans le rapport inverse des bras de levier $1p_1$ et jp_1 ; la projection $s'_{011}f_1$, ainsi obtenue, mesurera donc la surface analogue qui, placée en j , ferait équilibre à la portion de voûte détachée, celle-ci agissant à l'extrémité du bras de levier total mesuré par la distance du point de rotation à la verticale jk ; mais, comme le bras réel du levier que nous avons à considérer se réduit effectivement à la portion qui se termine à la verticale du centre de gravité de la masse, il s'ensuit que la force horizontale que nous venons ainsi de déterminer doit être diminuée de toute la quantité qui fait équilibre à la surface de la portion de voûte que nous considérons, agissant à l'extrémité du bras de levier partiel excédant $c'p_1$. Or comme le moment de cette

portion de force excédante nous est précisément donné en jm_0 , il suffira de diviser ce moment par le bras de levier vertical correspondant pour obtenir la force de pression à soustraire.

Dans cette division, nous devons nécessairement prendre pour unité la même grandeur $p_n = jn'$, qui nous a servi à obtenir la valeur cubique du moment : nous détruirons ainsi, par une opération inverse, l'unité de multiplication accidentellement introduite.

Opérant donc cette division entre les conjuguées jk et jb' , et portant soustractivement le quotient partiel obtenu jf'' sur la force horizontale correspondante, le reste s_0, f'_0 sera, en grandeur et en direction, la force de pression cherchée; ou, en d'autres termes, la hauteur d'un rectangle pesant, ayant pour base l'unité de mesure qui a servi à évaluer la surface des voussoirs, rectangle qui, placé en j , de manière à ce que son centre de gravité fût sur l'horizontale jb' , ferait équilibre à la portion de voûte correspondant au premier voussoir.

En opérant de même pour tous les autres joints, nous obtiendrons en s_1, f'_1, s_2, f'_2 , etc., une suite d'ordonnées représentant chacune les forces qui correspondent aux diverses suppositions de ruptures qui résultent de la division en voussoirs opérée sur la voûte. Enfin, joignant l'extrémité de ces ordonnées par une courbe, la tangente à cette courbe menée en F parallèlement à la ligne jk déterminera par son point de contact l'ordonnée maxima SF de cette courbe; et, par conséquent, la force de plus grande pression qui doit être censée appliquée au point j , et que la masse de la demi-voûte de gauche et de son piedroit doit nécessairement contre-balancer pour que la voûte soit en équilibre.

DEUXIÈME PARTIE DU PROBLÈME. *Détermination de l'épaisseur du piedroit correspondant à la supposition d'équilibre strict et à celle d'équilibre stable.*

Nous avons emprunté la solution de la première partie du problème qui nous occupe à un article publié par M. Poncelet dans le *Mémorial de l'Officier du Génie*, qui offre une suite des applications les plus élégantes du calcul par le trait ; mais le reste de la solution donnée par ce savant ingénieur, se trouvant affecté de formules algébriques, n'a pu être compris dans notre travail, puisque, d'après le titre que nous avons adopté, c'est par les seuls procédés graphiques que nous devons obtenir les solutions des problèmes que nous avons à résoudre.

Nous emploierons encore le procédé d'interpolation pour arriver au nouveau résultat que nous cherchons ici ; et c'est en construisant la courbe des erreurs commises par une suite de suppositions arbitraires, que nous arriverons encore à trouver l'épaisseur qui correspond aux deux cas d'équilibre.

La grandeur SF représentant, d'après les constructions précédentes, le maximum de pression exercée horizontalement au point j par la demi-voûte de droite, pour qu'il y ait équilibre il faut que le moment de cette force (ou surface pesante), pris par rapport à l'arête extrême du piédroit, soit équivalent au moment de la demi-voûte totale, augmenté du moment du piédroit lui-même, tous deux étant pris par rapport au même point. Le problème se réduira donc à trouver l'épaisseur de piédroit qui satisfait à cette double condition.

Voyons d'abord si elle serait remplie par l'épaisseur arbitraire ab que nous lui avons donnée.

En projetant la surface totale de la demi-voûte js_{126} , dans le rapport inverse des deux bras de levier jk et ka , nous obtiendrons en jR la force horizontale qui, placée en j , ferait équilibre au poids de la demi-voûte ; si le centre de gravité de celle-ci se trouvait placé sur la verticale jk : nous aurons par conséquent obtenu une force qui dépassera celle que nous cherchons de toute la portion destinée

à faire équilibre à la demi-voûte agissant autour du bras de levier qui correspond à son propre centre de gravité. Cette dernière peut aisément être déterminée, puisque nous avons, de j en m_{128} , son moment exprimé en fonction de l'unité p_n ; car, pour passer du moment à cette force, il suffira de diviser celui-ci par le nouveau bras de levier en employant à ce tracé l'unité jn' ; et le résultat de cette division, opérée entre les conjuguées jb' et jS , nous fournira en jS' cette portion de force que nous avons à retrancher, et qui, se trouvant ainsi portée soustractivement sur la force à réduire, nous donnera immédiatement, de R en S' , la grandeur réelle de la force, qui, placée en j , ferait équilibre à la demi-voûte tournant autour du point a .

Le piédroit, de son côté, a son centre de gravité connu de position; il coïncide avec le centre de figure; et, quant à sa surface, elle se trouve mesurée par la portion de la ligne bt , que ses deux bases interceptent; cette ligne est menée du point b tangentiellement au cercle décrit du point opposé comme centre, avec un rayon égal à l'unité de mesure o_1 adoptée pour évaluer la surface de la voûte.

D'après ces données, il suffira d'opérer la projection de la surface $bt = b't'$ dans le rapport inverse des bras de levier, pour obtenir la mesure de la force $t'e$ qu'il faudrait placer en j pour faire équilibre au piédroit. Ajoutant celle-ci à celle déjà trouvée, et qui correspond à la demi-voûte, on obtient de R en E la portion de force qui mesure la résistance du piédroit, totalisée avec celle de la demi-voûte.

La somme de ces deux forces comparée à la pression SF la dépasse d'une quantité $F'E$; ce qui indique que l'équilibre strict correspondrait à une dimension de piédroit moindre que celle qui vient de fournir ce résultat. Mais, comme on ne cherche le point d'équilibre strict que pour

passer aux dimensions qui correspondent à l'équilibre stable, nous allons supposer, pour satisfaire à cette nouvelle condition, que la force de pression est augmentée dans un certain rapport. Si nous adoptons le coefficient 2, que M. Poncelet a appliqué à son épure, comme celui qui présente le plus de garantie, la force de pression se trouvera doublée par cette supposition, et, par conséquent, égale à SF'' , et, dès lors, l'épaisseur choisie se trouvera insuffisante pour lui faire équilibre.

Nous adopterons donc une épaisseur plus forte, et, sans avoir besoin de recommencer les opérations précédentes, il nous suffira de trouver quelle est la portion de force qu'il faut ajouter à RE pour satisfaire au changement d'épaisseur et à l'éloignement du point de rotation.

Cette portion devra faire équilibre 1° à la voûte et au piédroit, limités à l'épaisseur précédente ab et agissant ensemble à l'extrémité d'un levier égal à la portion d'épaisseur sur-ajoutée; 2° au trapèze qui compose cette sur-épaisseur, agissant, de son côté, à l'extrémité d'un levier moitié moindre.

On obtient séparément les deux composantes $h\nu$ et $t'e'$, en portant sur la verticale ah les surfaces relatives à la demi-voûte et à son piédroit de b'' en h et de b'' en t'' , et projetant polairement autour du point b'' le bras du levier ag sur les ordonnées orthogonales qui correspondent à l'extrémité de chaque surface.

La troisième s'obtient, à son tour, en portant sur la verticale li , qui correspond au centre de largeur du trapèze, la dimension il qui mesure sa surface; ce trapèze ayant, par construction, une largeur égale à l'unité, et pour mesure sa hauteur moyenne. Une projection analogue à la précédente donnera donc la force cherchée lq sur l'ordonnée qui passe par l'extrémité de cette grandeur placée comme nous venons de l'indiquer, et à partir du point i . Mais, pour la simplicité de l'épure, placée,

cette fois, dans un sens inverse par rapport à l'horizontale $j'b'$, ajoutant ces trois forces à la grandeur RE déjà trouvée, nous obtiendrons une résultante R_x qui dépassera le maximum de poussée; nous aurons donc donné au piédroit une épaisseur trop forte. Il nous restera, en conséquence, pour circonscrire la vraie solution dans des limites plus rapprochées, à tenter encore une opération entièrement analogue pour une épaisseur moindre.

Cette fois, la mesure du nouveau trapèze pourra être estimée en fonction de la mesure du trapèze précédent; et cela en supposant que les deux surfaces sont entre elles comme leur largeur; on fera bien, en conséquence, d'adopter un rapport susceptible d'une évaluation facile; dans l'épure, nous avons supposé que ag' était les $\frac{3}{4}$ de ag . Et enfin, en appliquant au tracé d'une courbe d'interpolation les trois épaisseurs prises pour abscisses et les trois erreurs qu'elles auront fournies comme ordonnées, nous obtiendrons, au moyen de cette courbe, la vraie dimension qu'il convient de donner au piédroit. En portant donc sur chacune des lignes qui figurent les épaisseurs arbitraires, les erreurs positives ou négatives qui résultent de chaque supposition correspondante, la courbe qui réunit les trois points ainsi déterminés donnera, par son intersection avec la ligne des abscisses, le point g''' où l'erreur serait nulle, et par conséquent celui qui correspond à l'épaisseur que l'on avait l'intention de déterminer. Cette courbe peut être tracée arbitrairement à la main; mais, sur l'épure en grand, il sera bien d'employer le système d'interpolation parabolique.

Un procédé entièrement analogue ferait connaître l'épaisseur du piédroit qui correspond à l'équilibre strict. Nous pouvons nous dispenser d'en donner les détails, qui seraient absolument identiques à ceux qui résultent de la construction précédente, sauf qu'au lieu d'ajouter le moment du trapèze il faudrait au contraire le retrancher.

Nous avons indiqué l'épaisseur de l'équilibre strict par une ligne ponctuée, afin de faire voir la différence qui existe entre le résultat qui correspond à la stabilité théorique et celui qui satisfait à la stabilité pratique adoptée dans le cas particulier que nous venons de traiter. Nous remarquerons à ce sujet que le coefficient de stabilité employé dans cette circonstance, pour nous conformer à l'exemple choisi par M. Poncelet, et qui s'applique spécialement aux voûtes construites à l'épreuve de la bombe, doit, d'après M. Audoy, être réduit à 1.90 et 1.80 environ, pour les voûtes des grands ponts; et qu'il supporte une réduction encore plus forte, pour les voûtes qui rentrent dans les constructions ordinaires.

AUTRE SOLUTION DE CE PROBLÈME.

La voûte étant divisée en voussoirs comme dans la figure précédente, après avoir pareillement obtenu, Pl. VIII, et les centres de gravité de chacune de ses subdivisions, et la mesure linéaire de leur superficie, rapportée à la largeur de douelle prise pour unité, on procédera, comme il suit, à la recherche immédiate de la plus grande poussée.

Considérant, par exemple, le premier voussoir adjacent au sommet, on placera la ligne $1s$, qui mesure son aire sur la verticale qui passe par son centre de gravité, à partir de l'horizontale jb' ; cette portion de droite représentera ainsi, en grandeur et en direction, la force qui sollicite le voussoir à tourner autour de son arête inférieure, dans le cas où le joint correspondant $1s$, tendrait à s'ouvrir. De plus, en joignant cette arête r à la projection du centre de gravité sur l'horizontale jb' , la ligne qui opérera cette jonction viendra intercepter, sur l'ordonnée élevée en s' , une distance $s'f$, mesurant à son tour l'intensité d'une force de même nature, qui, appliquée au sommet de l'extrados, ferait précisément équilibre au premier voussoir tournant autour du point 1 ; car les forces ainsi déterminées

se trouveront dans le rapport inverse des deux bras de levier qui correspondent pour chacune d'elles à ce point de rotation.

Par une construction semblable, on obtiendra successivement, sur cette même ordonnée, les forces partielles s'_1f_1 , s'_2f_2 , etc., capables de faire équilibre, dans les mêmes circonstances, au premier voussoir tournant successivement autour des autres points de division du cintre, jusqu'au sixième inclusivement, qui correspond au joint de naissance de la voûte.

En procédant d'après les mêmes principes, on trouvera sur l'ordonnée s'_1f_1 les forces qui feront équilibre au second voussoir tournant 1° autour de sa propre arête 2° autour de toutes les autres arêtes qui lui sont inférieures; et l'on devra compléter cette même recherche pour les autres voussoirs inférieurs.

Cela fait, sur chacune des ordonnées qui auront servi à déterminer ces différentes forces élémentaires, et à partir de la verticale jk , on additionnera séparément toutes celles qui proviennent du joint correspondant à cette ordonnée, et l'on aura ainsi, pour chacun de ces joints, la grandeur de la force totale qui, placée en j , représente la poussée de la portion de voûte que ce joint détache quand la rupture a lieu dans son sens.

Pour le premier joint, cette force se borne uniquement à celle qui fait équilibre au premier voussoir, tournant autour de son arête : à la force R_1F_1 , égale à s'_1f_1 .

Pour le second joint, la résultante se compose de la force égale à s'_1f_1 , qui maintient le premier voussoir autour de la seconde arête; plus, la force égale à s'_2f_2 , qui maintiendrait le deuxième voussoir autour de sa propre arête de rotation; et ainsi de suite en augmentant toujours d'une composante nouvelle par chaque joint successif auquel on parviendra, jusqu'à celui de naissance, dont la résultante se composera de la somme des six forces qui maintiennent

autour de son extrémité les six voussoirs supérieurs, c'est-à-dire dont l'ensemble ferait équilibre à la demi-voute totale, tournant autour de son arête de naissance.

En opérant les dernières additions, il sera nécessaire d'observer, en outre, que, depuis le quatrième joint, les centres de gravité des voussoirs ne tombent plus du même côté des points de rotation qui leur sont immédiatement inférieurs, et qu'une partie des forces qui les sollicitent doivent, en conséquence, être prises avec le signe contraire; en les faisant figurer dans les additions correspondantes, on devra donc les porter soustractivement. Elles sont d'ailleurs suffisamment indiquées dans la figure pour qu'on ne puisse s'y tromper: ce sont celles qui, comme $s_4 f''$, tombent à gauche de la verticale qui passe par le centre de gravité du voussoir auquel elles correspondent.

La courbe $F_1 F_2 F_3$, etc., qui réunit par interpolation les extrémités des résultantes partielles, fait connaître la force maximum cherchée; elle se trouve égale à l'ordonnée ef , et correspond à une disjonction de la voûte qui s'opérerait entre le quatrième et le troisième voussoir.

Nous rappellerons, en outre, que la force qui ferait équilibre à la voûte totale, tournant autour de l'arête des naissances, est connue et se trouve déterminée, dans cette même courbe, par la demi-ordonnée $R_6 F_6$ du sixième joint: la demi, parce que les mesures linéaires des voussoirs, telles que nous les avons obtenues, sont encore doubles de leur valeur réelle, et qu'elles ont été maintenues telles dans la détermination de chacune des ordonnées.

Au moyen de cette force, la solution de la deuxième partie du problème, qui consiste à chercher l'épaisseur qu'il convient de donner au piedroit pour que l'ensemble résiste à la poussée maximum que nous venons de déterminer, va s'obtenir d'après les mêmes principes que nous venons d'appliquer à la recherche de cette poussée:

Portons cette force de 6 en a , et additionnons sur la

ligne des naissances, à partir du même point, les surfaces élémentaires réelles qui composent la demi-voûte : soit la moitié des grandeurs 1 s_1 , 2 s_2 , etc. Portons, en outre, sur $6p'$ le bras du levier jp de la force $\frac{1}{2} F_e R_e$. Ces données mises en place, il suffira de mener par a une parallèle à $s_6''p'$, pour obtenir en $6d$ le bras du levier à l'extrémité duquel doit agir la force $6s_6''$, c'est-à-dire la demi-voûte elle-même, que cette force linéaire représente. Donc, en reportant ce bras de a en d' , nous aurons la projection du centre de gravité de la demi-voûte, puisque c'est verticalement au-dessus de ce point que doit se trouver appliquée la force $6s_6''$.

La verticale du centre de gravité de la demi-voûte une fois connue, comme nous possédons également sa surface totale, il va nous être possible d'opérer sur elle, ainsi que nous venons de le faire par rapport à chaque voussoir en particulier. Nous allons donc chercher, par un procédé absolument identique, quelle est la force qui, placée en j , doit soutenir la voûte et son piédroit, tournant ensemble autour de l'arête extrême de ce dernier. Et nous supposerons encore à ce piédroit des épaisseurs variables, qui permettront d'obtenir, par interpolation, celle qui correspond à l'équilibre, c'est-à-dire celle où la résultante des deux actions se trouvera exactement égale au maximum de poussée que nous avons déterminé ci-dessus.

Ainsi, portant de j en s_6'' la surface totale de la demi-voûte, déjà additionnée en $6s_6''$, une parallèle jE à la ligne gi nous déterminera la force qui lui ferait équilibre autour du point g , pris pour centre de rotation ; et successivement on aura, par un moyen analogue, les forces $s_6'''E'$ et $s_6'''E''$ qui correspondent aux points de rotation g' et g'' . On comprendra sans peine cette nouvelle construction, en remarquant que le changement de tracé se réduit à faire avancer la verticale di du centre de gravité jusqu'à ce qu'elle se confonde avec la verticale du sommet de la voûte, toutes les autres lignes restant parallèles pendant cette translation.

Quant au piédroit et aux deux trapèzes, il n'y a rien de changé dans le tracé qui fournit les forces qui leur font équilibre, et on les détermine comme nous venons de l'indiquer dans l'épure précédente.

Ces éléments une fois connus, il ne nous restera plus qu'à opérer leur sommation, en groupant séparément les composantes qui correspondent à chacun des points de rotation choisis; et par la comparaison des trois résultantes ainsi obtenues en α , β et γ , avec l'ordonnée maxima φ' , nous reconnaitrons encore que la vraie solution tombe entre les deux épaisseurs extrêmes. La courbe des erreurs nous servira, comme dans la figure précédente, à trouver le point précis qui correspond à la véritable épaisseur.

Nous avons déjà remarqué que pour déterminer l'ordonnée maxima nous avons fait usage de surfaces doubles de leur véritable grandeur; cette ordonnée se trouvait donc affectée par avance du coefficient de stabilité adopté dans l'épure précédente; c'est donc l'épaisseur stable à laquelle nous sommes immédiatement parvenus.

On pourrait encore obtenir l'épaisseur du piédroit par une construction beaucoup plus directe, en se fondant sur les considérations suivantes: puisque nous avons de s_6''' en α la grandeur de la force qui fait équilibre à l'ensemble de la demi-voûte et du piédroit, limités tous deux à la verticale gl , et tournant autour de son extrémité inférieure g , il s'ensuit qu'en portant sur cette ligne, de o en s_6'''' , le total des deux surfaces ainsi limitées, et en élevant en ce point une ordonnée $s_6''''t'$ égale à $2\varphi'$, c'est-à-dire à l'excès de force auquel il reste à faire équilibre, cette force, projetée dans le rapport de la surface totale à son propre bras de levier $og_i = jk$, nous fera connaître en g , la distance d'un nouveau point de rotation, par rapport auquel la voûte et son piédroit, toujours limités à la même verticale, feront exactement équilibre à la force provenant du maxi-

mun de poussée, la distance entre g_1 et g_2 devant rester vide pour l'exactitude de cette supposition.

Quand nous supposerons cet intervalle trapézoïdal rempli en maçonnerie, nous aurons donc un ensemble de résistance qui dépassera l'équilibre de toute la portion de force qui correspond à l'équilibre de ce trapèze on , et qui se trouvera mesurée à son tour par la demi-ordonnée nu .

Il nous suffira donc, pour arriver à l'épaisseur cherchée, de trouver un point de rotation intermédiaire g_2 , tel que la portion de poussée, dont il ne permet pas de tenir compte en mt' , se trouve précisément égale à la force qu'il faudrait opposer pour faire équilibre au trapèze excédant dont ce point détermine la base.

La ligne de projection polaire, qui aboutit à ce point de rotation particulier, doit donc laisser en dehors sur $s_6''t'$ une grandeur mt' exactement égale à la grandeur $n''v''$, qu'elle interceptera sur l'ordonnée orthogonale qui provient de l'extrémité de la demi-mesure linéaire du nouveau trapèze sur-ajouté au piédroit, mesure nécessairement moindre que celle du trapèze on . Les deux surfaces trapézoïdales peuvent d'ailleurs se déduire l'une de l'autre, en admettant, comme nous l'avons déjà supposé, qu'elles diminuent proportionnellement à leur largeur.

Ces données une fois admises, on divisera les deux lignes no et $s_6''t'$ en un même nombre de parties égales; on mènera les ordonnées orthogonales et polaires qui correspondent à ces divisions; on joindra, par une courbe $uv''o$, les points d'intersection qui correspondront sur ces ordonnées à un numéro de division du même ordre, ces numéros allant de bas en haut, pour la ligne no , et de gauche à droite, pour la ligne $s_6''t'$; et on trouvera l'ordonnée polaire qui correspond à l'épaisseur cherchée, en adoptant celle qui coupe la courbe en un point v'' , dont l'ordonnée orthogonale se trouve exactement égale à la distance que

l'ordonnée polaire elle-même intercepte à son départ, entre son origine m et le point t' .

On peut, dans cette construction, tenir compte de la véritable mesure des trapèzes; alors les abscisses, qu'il faudra nécessairement évaluer à part, ne diviseront plus no en parties exactement proportionnelles aux subdivisions de $s_6''t'$.

On peut aussi varier la forme d'interpolation que nous venons de proposer: ainsi, en plaçant sur une même ligne la suite des ordonnées orthogonales de la courbe, on peut composer une échelle à termes superposés qu'il suffira de rapprocher de l'échelle tracée sur $s_6''t'$ pour reconnaître quelles sont les deux subdivisions de même numéro qui coïncident, et, par conséquent, pour avoir le point de départ de la ligne cherchée. La même coïncidence s'obtiendrait en promenant l'échelle $s_6''t'$ le long de la courbe, d'une ordonnée orthogonale à l'autre.

Enfin, on peut remarquer que, dans le cas où l'on admet que les trapèzes diminuent de surface proportionnellement à leur largeur, les grandeurs qui mesurent les forces qu'il s'agit de balancer sont liées par les relations suivantes: $t'm$ est moyenne proportionnelle entre $s_6''m$ et $n'v'-t'm$, et $n'v'$ est moyenne proportionnelle à son tour entre $t'm$ et nu . Cette double relation va nous permettre d'obtenir, par une interpolation mécanique, la valeur de $t'm$: plaçons additivement de a en b (fig. 2) les deux grandeurs $s_6''t'$ et nu ; élevons au point c où elles s'aboutent une perpendiculaire, et une droite faisant un angle de 45° . Faisons mouvoir sur ces trois lignes une équerre de manière à ce qu'un des côtés de l'angle droit passe constamment par le point b , tandis que l'angle droit parcourra la verticale, et simultanément assujettissons une règle à s'appuyer constamment sur le point a et sur l'angle droit mobile de l'équerre. Quand on sera arrivé à la position particulière pour laquelle les deux in-

tersections e et d correspondront à la même verticale, la seconde branche de l'équerre déterminera de c en e la grandeur em cherchée. Cette interpolation n'exige, comme on voit, que la mise en œuvre des deux instruments linéaires employés dans les tracés d'épure et de cabinet. Nous avons doublé les dimensions on et nu , et toutes celles de la *fig. 2*, pour que le tracé fût plus distinct; mais sur l'épure la première de ces dispositions serait une faute; on et par suite nu doivent être réduits de moitié.

Si l'on voulait connaître l'épaisseur que la voûte doit présenter à sa naissance pour résister à la poussée maximum, il suffirait de faire entièrement abstraction, dans les tracés précédents, des parties étrangères à la voûte qui sont inférieures à la ligne des naissances, et de prendre pour points de rotation successifs les points qui, sur cette même ligne, correspondent verticalement à ceux que nous avons précédemment adoptés. Les trapèzes ajoutés pour compléter l'épaisseur cherchée se réduiront, en conséquence, à celle de leur portion qui se trouve située en dessus des naissances, et donneront pour l'épaisseur de la voûte en ce point une dimension nécessairement moindre que celle que nous avons obtenue pour les piédroits.

Si l'on voulait connaître l'épaisseur à donner au piédroit, en lui supposant une hauteur infinie, il suffira de remarquer que, pour ce cas particulier, la composante horizontale qui correspond à la demi-voûte se trouve nulle comme appliquée à une masse finie, et agissant à l'extrémité d'un levier infini; tandis que celle hh' qui dérive du piédroit tend sans cesse à se rapprocher d'une grandeur qui se trouvera exprimée à la limite, vu qu'à la limite la grandeur finie jp cesse d'influer sur la valeur de ce rapport, par la demi-épaisseur projetée dans le rapport de la hauteur du piédroit à la grandeur de la tangente qui mesurera sa surface, soit à cause de la similitude des

triangles $b16$ et $gt''b$, projetée dans le rapport de l'unité à l'épaisseur elle-même.

C'est cette demi-dimension, ainsi modifiée, qui doit à elle seule, dans notre supposition, se trouver égale à la poussée. Donc, l'épaisseur entière elle-même, projetée dans le rapport de l'unité à sa propre dimension, devra se trouver égale au double de cette poussée. Mais nous avons vu, dans le tracé de l'élévation aux puissances, que cette sorte de projection donnait la surface du carré construit sur l'épaisseur, exprimée en unités superficielles équivalentes à l'unité qui sert à opérer la projection. Donc, enfin, l'épaisseur cherchée devra se trouver égale au côté du carré équivalent en surface au double du rectangle qui mesure la pression maximum.

Ce résultat pouvait d'ailleurs s'obtenir *a priori* ; car, dès que le piédroit devient infini, on doit, par rapport à lui, faire abstraction de l'influence de la portion de voûte qui lui est supérieure ; et l'on peut regarder la force horizontale comme immédiatement appliquée au sommet de la surface rectangulaire du piédroit, dont la seule action de résistance doit alors déterminer l'équilibre.

Or, si la force horizontale se trouvait appliquée au centre de la hauteur du piédroit, elle devrait, pour lui faire équilibre, se trouver mesurée par le carré construit sur l'épaisseur de celui-ci. Cette relation est une conséquence d'un principe que nous avons déjà établi, et d'après lequel, quand la surface d'un rectangle se trouve rapportée à une unité de mesure égale à sa demi-hauteur, son moment, autour d'une de ses arêtes de base, est mesuré par le carré construit sur son épaisseur. L'énoncé ci-dessus est l'expression d'un moment composé de facteurs identiques.

Il s'ensuit que la force horizontale placée au sommet du même rectangle, et agissant en conséquence à l'extré-

mité d'un levier double, ne sera plus que la moitié de la valeur précédente. Il faudra la doubler pour obtenir la surface du carré construit sur l'épaisseur du rectangle auquel elle fait équilibre.

Et comme dans ce dernier raisonnement nous n'avons pas eu besoin de nous occuper de la hauteur effective du rectangle, il s'ensuit que la dimension ainsi trouvée constitue l'épaisseur d'un mur rectangulaire de résistance équivalente à celle de la voûte, et qu'on peut également lui supposer une hauteur infinie et le réduire aux dimensions de la voûte elle-même, mesurée entre son extrados et la base inférieure de son piédroit.

On trouvera cette épaisseur particulière du piédroit dans les deux cas d'équilibre strict et d'équilibre stable, en prenant une moyenne proportionnelle entre le double de l'unité, c'est-à-dire deux fois la corde o_1 , et la grandeur de l'ordonnée maxima qui mesure la poussée dans les deux suppositions d'équilibre strict et d'équilibre stable. Ces constructions sont si simples, qu'il suffit de les indiquer, sans qu'il soit nécessaire de leur consacrer une figure particulière.

On trouvera dans le 12^e numéro du *Mémorial du génie* la solution graphique du problème qui nous occupe, telle que M. Poncelet l'a donnée le premier; elle offre une discussion complète des divers cas de rupture auxquels les voûtes peuvent se trouver sujettes, en raison de la forme particulière affectée par leur cintre; ils correspondent presque tous à des dimensions exceptionnelles. Nous renverrons, en conséquence, à l'article précité ceux qui voudront en connaître plus particulièrement les détails de tracé.

Il est cependant un de ces cas que nous ne saurions tout à fait passer sous silence; c'est celui qui correspond à la supposition de glissement d'une partie du cerveau de la voûte, suivant un des plans de joint dont l'incli-

naison se prête à cette espèce de mouvement. Cette tendance au glissement se réalise principalement dans les voûtes en plates-bandes et en arcs de cercle. Quand on traite ces sortes de voûtes, et celles qui s'en rapprochent par leur surbaissement, il faut donc se rendre compte de la poussée maximum produite par ce genre de rupture.

Nous avons déjà suffisamment expliqué, dans la partie de cet ouvrage qui se rapporte à la poussée des terres, comment on détermine la force de translation d'un solide prismatique glissant sur le plan incliné qui supporte une de ses faces, et par quel tracé l'on obtient la pression horizontale qu'il faudrait lui opposer pour le maintenir en équilibre sur ce plan. Nous avons, en outre, indiqué comment on obtenait le maximum de cette force correspondant à une succession des prismes élémentaires juxtaposés.

Pour appliquer cette recherche à la Pl. VIII, *fig. 1*, les surfaces réelles $\frac{1}{2} 1 s$, $\frac{1}{2} (1 s + 2 s)$, etc., ont été placées en superposition, à partir du point p sur la verticale Jk ; ces forces ont été chacune décomposées en pression normale au joint de glissement qui leur correspond, et en translation le long de ce joint, puis projetées sur l'horizontale ps_0 par une transversale qui fait avec chaque force de pression un angle égal à l'angle de glissement naturel des matériaux qui composent la voûte; cette projection détermine les pressions horizontales p_z , p_z , p_z , et pZ . C'est à cette dernière grandeur que correspond leur maximum; elle se rapporte à un joint interpolé $\sigma\sigma'$ qui diviserait à peu près en deux parties égales le second voussoir, et qui s'y trouve indiqué par une ligne ponctuée. Pour comparer ces pressions à celles qui résultent du cas de rotation, il nous a suffi de les doubler et de les placer sur les ordonnées analogues de la courbe qui correspond à ces dernières. Comme on devait s'y attendre, on voit, par la nouvelle courbe qu'elles déter-

minent, que le maximum Z' provenant du cas de glissement est inférieur à celui que donne la rotation, et que c'est, par conséquent, à ce dernier seul qu'il faut avoir égard, dans le cas de l'épure que nous avons traitée. Les deux courbes se coupent en un point pour lequel ces deux actions sont égales, et ce point correspond à très-peu près au deuxième joint qu'il dépasse cependant. Si la voûte se bornait donc à la portion d'arc 0, 1, 2, ce serait à la pression par glissement qu'il faudrait faire équilibre de préférence.

Quand on aura en conséquence à chercher l'épaisseur des piédroits d'une voûte de forme très-surbaissée, on appliquera à la voûte divisée en voussoir ce deuxième procédé d'interpolation qui ne dépend que de l'inclinaison des joints et des grandeurs des surfaces qui mesurent les masses glissantes; et la poussée maximum obtenue devra être comparée à la poussée du même genre provenant de la rupture par rotation, pour pouvoir négliger celle des deux qui se trouvera inférieure à l'autre, et n'appliquer que la plus grande à la détermination de l'épaisseur des piédroits.

Il sera également convenable, dans les cas de surbaissement très-marqués, de déterminer séparément l'épaisseur des naissances, abstraction faite des piédroits, et d'adopter des dimensions qui permettent à la voûte de résister, non-seulement à la poussée par rotation autour de l'arête du joint horizontal qui leur est immédiatement inférieur, mais encore par glissement selon ce même joint.

La force qui représente la résistance à cette espèce de glissement s'évaluera en projetant la surface de toute la partie supérieure à ce joint, dans le rapport de la pression verticale au frottement qu'elle produit. Ce rapport est constant pour des matériaux de même nature; à défaut de documents auxquels on puisse se fier, il devra se trouver déterminé par des expériences directes

faites sur les matériaux qu'on doit employer. Il sera nécessaire d'en tenir compte indépendamment de toute cohésion produite par l'interposition du mortier. Il y a plus, car dans de certains cas, on devra s'assurer également par expérience des modifications que l'angle de glissement est susceptible de subir par l'interposition d'une couche de sable entre les deux surfaces; c'est-à-dire, en y supposant le mortier lui-même tout à fait désagrégé.

Pour montrer encore mieux comment les ressources que présente le calcul graphique sont susceptibles de se plier aux circonstances diverses que peut présenter une même question, nous allons supposer que la voûte dont nous venons de nous occuper est destinée à couvrir une citerne : il résulte de cette nouvelle condition que les piédroits, outre l'effort de la voûte, doivent encore résister à la pression du liquide que la citerne est destinée à contenir.

Cette pression, nous savons déjà (voir le premier problème de cette section) comment la traduire en surface; mais pour que la force de pression du liquide puisse, sous cette forme, être ajoutée à la pression de la demi-voûte, il faut que la surface triangulaire qui la représente soit ramenée : 1° à une pesanteur spécifique égale à celle des maçonneries qui composent la voûte; et 2° à être exprimée dans la même espèce d'unités linéaires, celle qui nous a servi à évaluer la surface des voussoirs de la demi-voûte. La nouvelle pression linéaire, ainsi modifiée, devra être appliquée au centre de gravité du triangle primitif, d'où elle a été dérivée et dont elle représente l'effet.

Pour avoir enfin, au moyen de cette force, un moment de même nature et susceptible par conséquent d'être ajouté à celui de pression de la demi-voûte de droite, il suffira de multiplier son expression linéaire, ainsi modifiée, par le bras du levier correspondant, soit le tiers de la hauteur du liquide.

Le produit de la multiplication ainsi conçue sera le moment supplémentaire qui résulte de la pression du liquide, valeur qu'il faudra ajouter au moment de pression de la demi-voûte de droite pour avoir la somme des moments qui tendent à renverser le piédroit autour de son arête extérieure. Cette somme de moments une fois connue, la somme des pressions qui en résultent au sommet de l'extrados s'en déduit ; le problème rentre, comme on voit, dans le cas que nous venons de résoudre précédemment ; et la dernière partie de la solution que nous venons de donner s'applique encore une fois à la nouvelle supposition que nous venons de traiter, soit qu'il s'agisse d'obtenir l'épaisseur de piédroit qui, par rapport à la nouvelle pression totale, correspond à l'équilibre strict, soit celle qui donnerait l'équilibre stable, en ayant eu soin d'affecter préalablement cette même pression d'un coefficient de stabilité convenable à la circonstance.

On ramène un triangle donné à un triangle équivalent en force et d'une pesanteur spécifique supérieure, en menant par un des sommets une ligne qui divise le côté opposé en deux parties, dont l'une, celle qui correspond au triangle transformé, soit au côté total dont elle fait partie, dans le rapport inverse des pesanteurs spécifiques des deux surfaces.

Appliquée au tracé des murs de soutènement, la même modification préalable dispenserait d'avoir recours à l'épaisseur normale, et pourrait ainsi, dans un grand nombre de cas, concourir à la simplification de l'épure.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pag.	Pl.	Figures.
AVERTISSEMENT.	i		
INTRODUCTION.	1		
PREMIÈRE PARTIE. — GRANDEUR LINÉAIRE.	9		
RÈGLES ÉLÉMENTAIRES DU CALCUL GRAPHIQUE. — Ad-			
dition et soustraction.	12	I	1, 2
Multiplication.	13		3
Division.	17		4
Divers moyens de partager une ligne en parties			
égales.	18		5, 6
Formation des puissances.	24		7
Extraction de la racine du second ordre.	25		8, 9
Proportions par différence et par quotient.	28		
Progressions par différence.	31		10
Construction des échelles.	33		11, 12, 13
Progression par quotient.	36		14
Extraction générale des racines; courbes et règles			
logarithmiques.	41		15
DES TRACÉS EN GÉNÉRAL. — Surfaces planes, surfaces			
irrégulières.	48		
Tracés de cabinet, tracés d'épure.	49		
Tracés sur matière brute.	50		
Tracés sur le terrain.	59		
DEUXIÈME PARTIE. — QUADRATURES ET CUR-			
TURES.	64		
Mesure graphique des surfaces.	69	II	5, 6, 7, 8
Description d'une échelle superficielle et son ap-			
plication aux calculs de terrassements.	73		9
Surfaces à périmètre courbe (divers procédés			
d'évaluation).	82		
Modification directe des surfaces (divers exemples			
d'addition, de soustraction et de subdivision			
superficielles).	88	III	1, 2, 3, 4, 5, 6
Centres de gravité.	101		
Mesures des cubes (divers procédés approximatifs).	103		7, 8
TROISIÈME PARTIE. — INTERPOLATION GRAPHIQUE.	118		
Interpolation par une courbe unique (comprenant			
les principales conditions qui déterminent les			
courbes du second ordre et les tracés linéaires			
qui s'y rapportent).	120	III IV	9, 10, 11, 12, 13 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Interpolation par une courbe de nature déter-			
minée (divers problèmes).	143		
Propriétés du quadrilatère complet.	150		
Tracés des courbes de raccordement.	154		
Raccordement parabolique.	155		9
Idem hyperbolique.	157		10
Idem elliptique.	158		3
Idem circulaire à grand rayon.	161		11

	Pag.	Pl.	Figures.
Interpolation au moyen d'un cercle auxiliaire.	166	V	1
Interpolation par une succession d'ares de même nature (le cercle et la parabole).	169		
Anses de panier à trois, cinq et sept centres.	170		2, 3
Arches à cintre elliptique et parabolique.	177		4
Contacts linéaires et osculations (procédés pour mener une tangente à une courbe quelconque).	181		
Contacts circulaires.	181		
Osculations des courbes du second degré et détermination générale des courbes osculatrices.	186		5, 6
Détermination approchée du cercle osculateur sur une courbe quelconque.	192		
Mesure linéaire de la circonférence (divers procédés avec évaluation approchée de l'erreur commise).	193		7, 8
Mesure et subdivision d'un arc de cercle.	199		
Division ternaire de l'arc et duplication du cône approchés (au moyen du conoïde).	201		9, 11
Trace de la courbe qui passe par six points (au moyen de la même surface).	210		10
QUATRIÈME PARTIE. — APPLICATION DES PROCÉDÉS DU CALCUL GRAPHIQUE A DIVERS PROBLÈMES DE STABILITÉ.			
	213		
Condition de stabilité des murs de soutènement. {	215	VI	1
Cas des liquides parfaits, etc.	220		2
Cas des liquides imparfaits.			
Cas où les terres sont susceptibles de cohésion. Détermination du prisme de plus grande poussée.	221		3, 4, 5
Cas où les terres s'élèveraient en surcharge talusée {	231		6, 7
affleurant le nœ intérieur.	234		9
affleurant le nœ extérieur.			
Un mur rectangulaire étant donné, construire le mur de résistance équivalente et d'une hauteur moindre.	235		8
Un mur rectangulaire étant donné, construire le mur de résistance équivalente avec fruit extérieur.	238		10
Trouver l'épaisseur des piedroits d'une voûte en berceau, dans les deux cas d'équilibre strict et stable.	240	VII	
Détermination du joint de rupture qui correspond au maximum de pression.	241		
Détermination des deux épaisseurs de piedroit (équilibre strict et stable).	244		
Autre solution de ce problème.	249	VIII	1, 2
Épaisseur du piedroit dont la hauteur serait infinie.	256		
Comparaison du maximum de poussée dû à la rotation des voussoirs et à leur glissement.	258		
Épaisseur des piedroits d'une voûte de citerne.	261		